

**3次元薄層球殻インダクションモデル計算のための有限要素法プログラムの開発  
—薄層要素の構成手法に関する基礎的検討—**

大志万 直人  
京都大学 防災研究所

**Development of a FEM Program for Calculating Induction Problem of a Spherical Shell:  
Methodological Consideration on Constructing Thin Sheet Elements in the FEM Program**

Naoto Oshiman  
The Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University

**Abstract**

Since the mid-1990s, several simulators for global EM induction in a 3D sphere have been developed on the basis of the finite difference method (FDM) or the finite element method (FEM or the edge-based FEM) for solving the EM differential equation. However, in those simulators, a thin sheet approximation, which is very useful for modeling ocean distribution on the surface of the Earth, is not implemented. I developed an EM induction FEM code in which thin sheet elements can be included in EM models, which are very simple ones of thin-sheet conducting spherical shell, based in the theory proposed by Rodger and Atkinson (1988). In this report, I will introduce the basis of the theory and the general outline of the developed calculation code.

**1. はじめに**

1990年代半ばごろから、グローバルな3次元電磁誘導のモデリングのための様々な数値シミュレーターが提案されてきた。これらは電磁誘導の方程式を差分法、有限要素法、辺要素有限要素などの手法を用いて解くものである。しかし、これまでに開発されてきたこれら一連のシミュレーターでは、地球表面の海陸分布などをモデル化するのに威力を発揮する薄層近似を、モデルの中に取り込むことまでは至っていない。

グローバル・インダクションモデルに薄層構造を取り入れることは、例えば、海陸の構造をグローバルモデルに容易にモデル化し取り入れることができ、深部の構造に着目する際の、計算資源の節約に寄与するものと考えられる。既存のシミュレーターにおいても、原理的には海陸構造を取り入れることは可能であるが、その構造を取り入れる際に、どうしても細密な要素をモデル計算領域内に取り込むことになり、計算資源によっては多大な負荷となりえるからである。

Rodger and Atkinson (1988)が提案した有限要素法で薄層要素を構成するための手法理論を基に、3次元有限要素法において薄層導体を薄層要素としてモデルに取り入れることができる具体的なプログラム開発を行った。本報告では、その手法の基礎と薄層要素を導入する際のキーポイントを主に解説する。

## 2. 支配方程式

ここでは、Rodger and Atkinson (1988)に従ってその理論を簡潔に紹介する。

誘導電流系を含まない領域（真空領域）で、磁場のスカラーポテンシャルを $\Psi$ とすると、スカラーポテンシャル $\Psi$ は以下の式を満たす。

$$\text{div}(\mu \text{grad } \Psi) = 0 \quad (1)$$

また、表面電流密度 $\mathbf{K}$ を、電流密度 $\mathbf{J}$ と薄層の厚さ $d$ を用いて次のように定義する。

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}d \quad (2)$$

$\mathbf{K}$ はシート表面に沿ってのみ変化する。さらに、 $\mathbf{K}$ はシート面上のスカラー量である スカラー $T$ により次のように表現できる。

$$\mathbf{K} \propto \text{grad } T \times \mathbf{n} \quad (3)$$

$\mathbf{n}$ はシート表面での単位法線ベクトルである。

Rodger and Atkinson (1988)では、式の展開に便利なようにということで、次のように $\mathbf{K}$ を定義している。

$$\mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{grad } T \times \mathbf{n}) \quad (4)$$

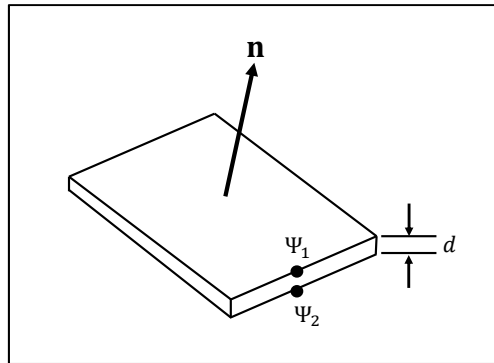


Fig.1: Typical structure of conducting sheet

図 1 : 薄層の模式図

第 1 図に示すような薄層を考える。ベクトル  $\mathbf{n}$  は薄層表面の法線ベクトルである。薄層の両面ではスカラーポテンシャル $\Psi$ が定義でき、薄層両側ではそれぞれ $\Psi_1$ と $\Psi_2$ であるとする。薄層表面の任意の点での薄層両面のポテンシャルは、薄層を流れる電流により $\mathbf{H} \times \mathbf{n}$ の値にジャンプを生じる。つまり、

$$\text{grad } \Psi_1 \times \mathbf{n} - \text{grad } \Psi_2 \times \mathbf{n} = \mathbf{K} \quad (5)$$

一方、薄層面において $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ の連続性により、

$$\mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} \quad (6)$$

ここで $\mu_1$ と $\mu_2$ は、薄層両側での透磁率である。

(2)式と $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ の関係を(4)式に代入し、両辺の  $\text{rot}$  を取り、マックスウェル方程式の電磁誘導の関係式を用いると、

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\sigma d} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

となり、さらに両辺と  $\mathbf{n}$  の内積を取ると、

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\sigma d} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \mu_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} \quad (8)$$

となる。これは、薄層と接触している面での境界条件の式となっている。

(4)式と(5)式から、

$$\text{grad } \Psi_1 \times \mathbf{n} - \text{grad } \Psi_2 \times \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \quad (9)$$

(9)式の両辺を $\sigma d$ で割ったのち  $\text{rot}$  を取り、 $\mathbf{n}$  方向の成分を考えると、

$$\text{rot} \frac{1}{\sigma d} (\text{grad } \Psi_1 \times \mathbf{n} - \text{grad } \Psi_2 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \text{rot} \left[ \frac{1}{\sigma d} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right] \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

となり、薄層両面でのポテンシャル・ジャンプを表す式となる。

以上、(1)式、(10)式が解くべき方程式となり、(8)式が薄層と真空領域の境界条件となる。

### 3. ガレルキン法による有限要素法の定式化

ここでは、ガレルキン法に基づく薄層要素を含んだ有限要素法の定式化について Rodger and Atkinson (1988)で説明されている結果のみ紹介する。

(1)式に重み付残差法であるガレルキン法を適用すると、次のような式となる。

$$\int \mu \text{grad } M \cdot \text{grad } \Psi \, d\Omega - \oint \mu N \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad (11)$$

ここで、 $M$ は重み関数で、 $N$ は薄層表面上の重み関数である。(11)式の左辺第2項は境界条件に関する項であることに注意してほしい。

また、(8)式にガレルキン法を適用すると、次のような式となる。

$$\int N \text{rot} \left( \frac{1}{\sigma d} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int N \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (12)$$

この式は、次のように変形できる。

$$- \int \left[ \text{grad } N \times \left( \frac{1}{\sigma d} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right) \right] \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int N \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (13)$$

薄層両面でのポテンシャル・ジャンプを表す式である(10)式にガレルキン法を適用すると、

$$\int N \text{rot} \frac{1}{\sigma d} (\text{grad } \Psi_1 \times \mathbf{n} - \text{grad } \Psi_2 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int N \text{rot} \left[ \frac{1}{\sigma d} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right] \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (14)$$

がえられるが、この式は次のように変形できる。

$$\oint N \frac{1}{\sigma d} (\text{grad } \Psi_1 \times \mathbf{n} - \text{grad } \Psi_2 \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{l} - \int \left[ \text{grad } N \times \frac{1}{\sigma d} (\text{grad } \Psi_1 \times \mathbf{n} - \text{grad } \Psi_2 \times \mathbf{n}) \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

$$- \oint N \frac{1}{\sigma d} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right] \cdot d\mathbf{l} + \int \text{grad } N \times \left[ \frac{1}{\sigma d} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (15)$$

(15)式の左辺第1項と第3項の薄層要素の集会積分の項は、薄層球殻などの問題ではお互いに打ち消すことになるため、結局、以下のような式になる。

$$- \int \left[ \text{grad } N \times \frac{1}{\sigma d} (\text{grad } \Psi_1 \times \mathbf{n} - \text{grad } \Psi_2 \times \mathbf{n}) \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int \text{grad } N \times \left[ \frac{1}{\sigma d} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } T \times \mathbf{n}) \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

$$= 0 \quad (16)$$

ここで、

$$\int \text{grad } N \times [(\text{grad } T \times \mathbf{n})] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int (\text{grad } N \cdot \text{grad } T) d\Gamma \quad (17)$$

の関係を用いると、次の式

$$\int \mu_1 \text{grad } M \cdot \text{grad } \Psi_1 d\Omega - \int \left[ \text{grad } N \cdot \frac{1}{\sigma d} \text{grad } T \right] d\Gamma = 0 \quad (18)$$

$$- \int \left[ \text{grad } N \cdot \frac{1}{\sigma d} \text{grad}(\Psi_1 - \Psi_2) \right] d\Gamma + i\omega \int \text{grad } N \cdot \left[ \frac{1}{\sigma d} \text{grad } T \right] d\Gamma = 0 \quad (19)$$

が、全体方程式の基本式となる。

一方、薄層と真空領域の境界での条件は、(6)式と(13)式のように表現されるので、これらの関係式と(11)式の左辺第2項より、節点1の真空領域と薄層間では、

$$\int \mu_1 \text{grad } M \cdot \text{grad } \Psi_1 d\Omega + \int \left[ \text{grad } N \times \frac{1}{\sigma d} \text{grad } T \times \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (20)$$

となり、節点2の真空領域と薄層間でも、同様にして

$$\int \mu_2 \text{grad } M \cdot \text{grad } \Psi_2 d\Omega + \int \left[ \text{grad } N \times \frac{1}{\sigma d} \text{grad } T \times \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (21)$$

となる。

有限要素法や境界要素法では、多くの場合、1つの要素に着目すると法線ベクトルは、どの面においても要素の外向きに設定することが多いが、薄層要素の場合、(21)式と(22)式の法線ベクトルの方向は、図1に示すように薄層の表と裏で同じ方向を向いている必要があることに注意しなければならない。

#### 4. 補間関数を用いた離散化

方程式系を離散化するために要素内での補間関数を導入する。 $\{M\}^T$ を通常要素での補間関数とし、 $\{N\}^T$ を薄層要素での補間関数とすると、ポテンシャル $\Psi$ と $T$ は、節点での値を用いて次のように表現できる。

$$\begin{cases} \Psi_i = \{M\}^T \{\Psi\} \\ T = \{N\}^T \{T\} \end{cases} \quad (22)$$

また、これらの勾配は、

$$\begin{cases} \text{grad}\Psi_i = [\text{grad}\{M\}^T]\{\Psi\} \\ \text{grad}T = [\text{grad}\{N\}^T]\{T\} \end{cases} \quad (23)$$

のように表現でき、各要素での離散化された式は、

$$\int \mu_1 \text{grad}\{M\} \cdot [\text{grad}\{M\}^T]\{\Psi\} d\Omega - \int \left[ \text{grad}\{N\} \cdot \frac{1}{\sigma d} \text{grad}\{N\}^T\{T\} \right] d\Gamma = 0 \quad (24)$$

$$\int [\text{grad}\{N\} \cdot \text{grad}\{N\}^T\{\Delta W_{12}\}] d\Gamma - i\omega \int \text{grad}\{N\} \cdot \text{grad}\{N\}^T\{T\} d = 0 \quad (25)$$

となる。ただし、 $\Delta W_{12} = \Psi_1 - \Psi_2$ である。この2つの方程式と(20)、(21)式を基に全体方程式を組上げればよい。全体方程式を構成する連立方程式では、各節点における $\Psi_i$ と薄層を構成する要素の節点での $T$ が未知数となる。

### 5. 計算コードの概要とテストモデル

前節までの有限要素法により定式化した離散化方程式(24)と(25)式を用いプログラム化するわけであるが、今回は、20節点のアイソパラメトリック要素を用いたFEMコードを開発した。開発に当たっては、Oshiman(2002)で使用したラプラス方程式を解くためのプログラムをベースとした。このプログラムは、加川(1982)で説明されているプログラムを基に80年代後半に開発したプログラムである。

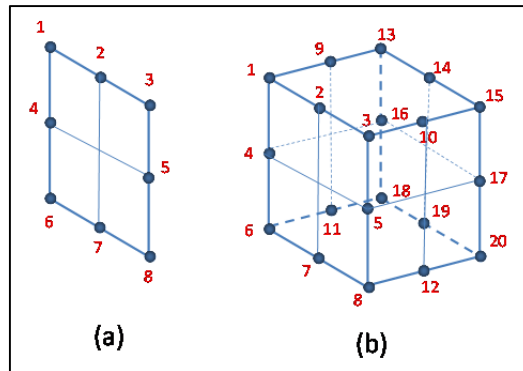


Fig.2: (a) Thin sheet element of eight nodes, (b) Quadratic element of twenty nodes

図 2 : (a)薄層要素 (8 節点) と(b)真空領域を表す通常要素 (20 節点)

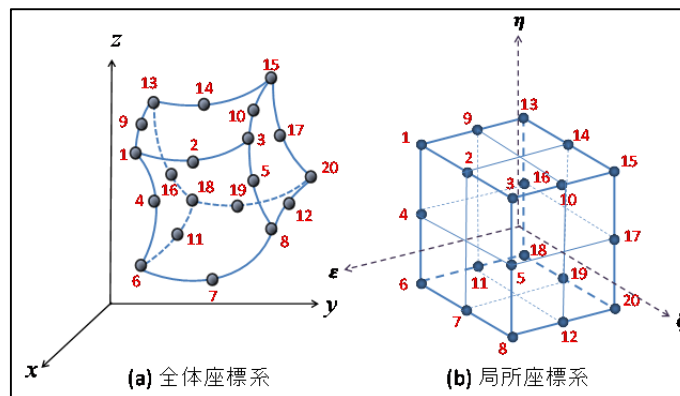


Fig.3: (a) Element in the global coordinates, (b) Element in the local coordinates

図 3 : (a)全体座標系による要素、(b)要素の局所座標系

このプログラムで使用する2つのタイプの要素、つまり、図2(a)に薄層要素(8節点要素)の構成を、また、図2(b)に真空領域に対応する通常要素(20節点要素)の構成を示す。この図では平面や立方体の形状をしているが、実際には、図3(a)に示すように、要素形状も2次関数で表現できるようになっているため、薄層は曲面として指定できる。そして、離散化された要素ごとの要素マトリクスを求める際に必要な体積分は、図3(b)に示される局所座標系において数値積分により求められる。また、Tに関わる表面積分に関しては、20節点の通常要素の一つの曲面上での数値積分として求めるようにプログラムは構成されている。

したがって、薄層要素は、図2(a)に示された8節点だけで定義されているわけではなく、薄層要素の表面と裏面に接する2つの通常要素の薄層と接している面を構成する8節点×2面=16節点の、合計24節点により一つの薄層要素が定義されていることになる。つまり、図2(a)に示された8節点で未知数 $T_i$ の値を定義し、薄層両面に接している2個の通常要素の各面の節点、合計16節点で、薄層両面のポテンシャル $\Psi_i$ の値を定義することになる。

このため、通常の有限要素法ではモデル設定の情報として必要なものは、1) 節点の座標、と2) 要素を構成する節点番号、だけであるが、薄層要素を含む有限要素法においては、この2の情報に加え3) 薄層が接している要素番号、4) 薄層に接している通常要素の面情報、が必要になる。このため、あらかじめ図2(b)の通常要素において6枚の面を示す面番号と各面を構成するローカル節点番号との対比を定義しておく必要がある。

このためプログラムを活用するためにはあらかじめ複雑な薄層モデル形状に関するデータを作成しておく必要がある。そのため、まだ、具体的な薄層球殻に関わるモデルデータは完成しておらず、より実的なモデルを計算するには至っていないが、図4に示すような非常に簡単なモデルを用いて計算した結果を示しておく。

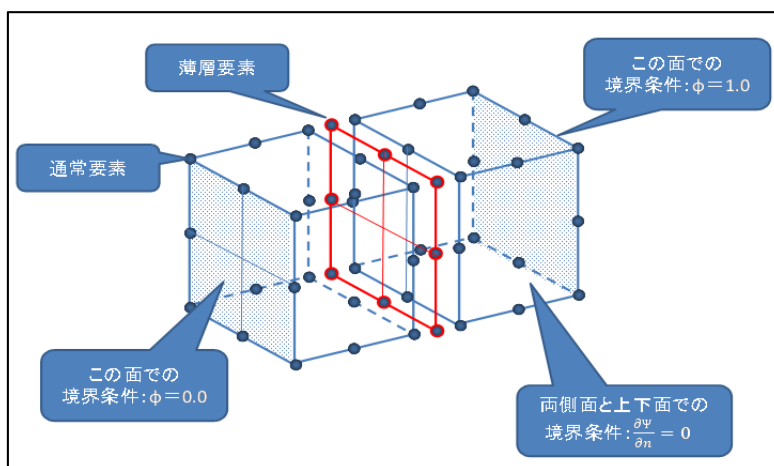


Fig.4: A test model for FEM calculation including a thin sheet element

図4: テストモデルの要素構成と境界条件

図中の赤で示された要素が薄層要素でその両面で真空領域である通常要素が接しているモデルで、薄層と接していない薄層面と真反対側の面において、実部の境界条件として、一方では $\Psi = 0.0$ を、その反対側では $\Psi = 1.0$ を与え、虚部の境界条件としてはいずれの面でも $0.0$ としている。モデルの

残る 4 つの側面では何も指定しないので、自動的に  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0.0$  が仮定される。

計算結果を図 5 に示す。図の左側は、モデル領域の中心を薄層に直行する線上でのポテンシャル値の実部と虚部をプロットしたものである。真空領域の要素が薄層の両側で 1 個のみであり、また、薄層が 1 枚の要素のみのモデルではあるが、薄層位置のポテンシャル・ジャンプが再現されていることがわかる。

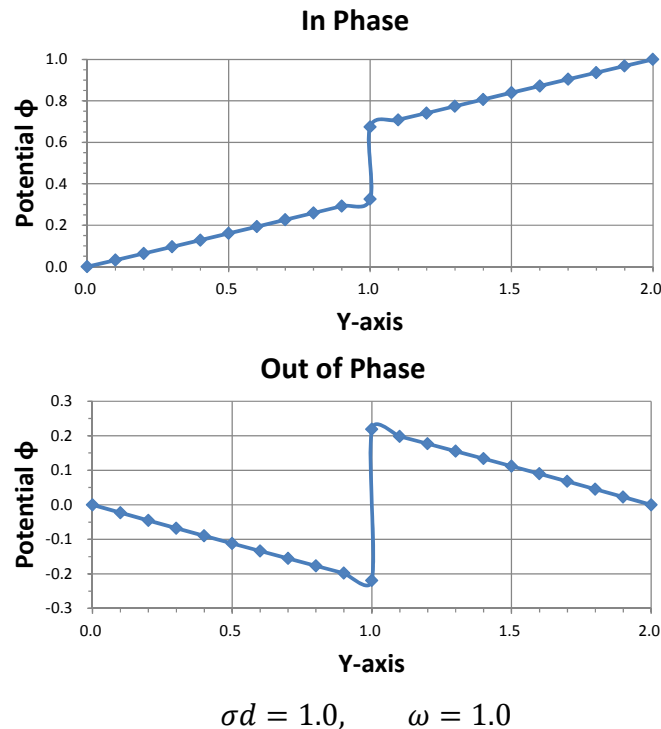


Fig.5: Calculation results of the model shown in Fig.4

図 5 : 図 4 に示すテストモデルでの計算結果

## 6. まとめ

今回示した計算例は、非常に単純なモデル構成ではあるが、Rodger and Atkinson (1988)の手法により、薄層導体要素が存在することによるポテンシャル・ジャンプを表現できることが確認できた。ただし、Rodger and Atkinson (1988)の手法そのままでは、インダクション・パラメータ  $\Omega (\Omega^2 = 4\pi\sigma\omega L)$  を導入することは、若干困難である。支配方程式に  $\Omega$  を取り込んだ形に書き換えるためには、Rodger and Atkinson (1988)が定義した(12)式の  $\mathbf{K}$  を以下のように変更するとよい。

$$\mathbf{K} = \text{grad } T \times \mathbf{n} \quad (26)$$

本報告では特に計算結果を示さないが、この書き換えによるプログラムでも同様な結果を得ることができ、薄層導体の存在をモデル化することが可能なことを確認している。

### 参考文献

加川幸雄、電気・電子のための有限要素法の実際、オーム社、pp.159, 1982.

Oshiman, N., Towards effective observations of resistivity changes due to fluid movement related to faulting,  
In *H. Ogasawara, T. Yanagidani and M. Ando, ed. Seismogenic Process Monitoring*, Balkema Publishers, Netherlands, 257-268, 2002.

Rodger, D. and N. Atkinson, Finite element method for 3D eddy current flow in thin conducting sheets, IEE Proceedings A, 135, 6, 369-374, 1988.