

# 火山を対象とした三次元CSEMデータ領域インバージョンにおける正則化手法の考察



南拓人<sup>1</sup>、宇津木充<sup>2</sup>、歌田久司<sup>1</sup>  
 1東京大学地震研究所、2京都大学理学部

## 1. 背景

データ領域インバージョン (e.g., Siripunvaraporn et al., 2005) は、理論的には Controlled-source EM (CSEM) インバージョンにも応用可能であるが、実施例の報告はほとんどない。また、データ領域インバージョンを用いた場合の正則化の方法は、これまで「滑らか」な構造を仮定した正則化項に頼られており、電気伝導度境界の明瞭なイメージングに適したインバージョン手法はこれまで報告がない。本研究では、火山の電磁モニタリングを目的としたインバージョンにおいて、データ領域インバージョンを採用し、さらに、電気伝導度異常の明瞭なイメージングを試みた。用いたのは、Xiang et al (2017) による、Minimum Support Gradient (MSG) 法である。データ領域インバージョンで用いる正則化項は、モデルに関する勾配がモデルに対して線形に表現できる必要がある。本ポスターでは、様々な正則化項の線形化の例を示し、MSGを用いた場合のデータ領域インバージョンの実施例を紹介する。

## 2. 順計算・逆計算手法

### <順計算>

スカラーポテンシャル  $\Phi$  を 0 にした、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  に関する誘導方程式を辺有要素法で解く。問題としては、火山の電磁モニタリングシステムである、ACTIVE (有線長の電流ソース問題) を対象とする。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + i\omega\mu_0 \mathbf{A} = \mu \mathbf{i}_s$$

### <逆計算>

目的関数:  $\Phi(\mathbf{m}) = \Phi_d(\mathbf{m}) + \lambda \Phi_m(\mathbf{m})$

$\Phi_m(\mathbf{m})$  の勾配が線形化できる時、

$$\nabla_m \Phi_m(\mathbf{m}) = \mathbf{B}_m(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{ref})$$

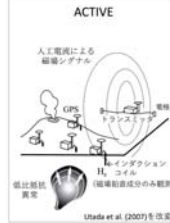
$$\nabla_m \Phi_m(\mathbf{m}) = \mathbf{B}_m$$

データ領域手法:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_{ref} + \mathbf{B}_m^{-1} \mathbf{J}_k^T \boldsymbol{\beta}$$

$$[\mathbf{J}_k \mathbf{B}_m^{-1} \mathbf{J}_k^T + \lambda (\mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d)^{-1}] \boldsymbol{\beta} = \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{F}(\mathbf{m}_k) + \mathbf{J}_k (\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_{ref})$$

(データ領域インバージョンでは、 $\mathbf{B}_m$  の逆行列が必要。)



## 3. データ領域手法に合わせた正則化項の線形化

Grayver et al. (2013) では、Gauss-Newton法の inversion スキームの中で、Minimum Support法を採用しているが、その際、 $\nabla_m \Phi_m$  の分母に現れる  $\mathbf{m}$  に、1ステップ前のモデルを用いるという方法で、線形化を行なっている。本研究では、この手法を用いて、左で紹介した正則化項の線形化を行った。

$$[\nabla_m \Phi_m(\mathbf{m})]_k = \Sigma \frac{\mathbf{F}(\mathbf{m}_k)}{\mathbf{G}(\mathbf{m}_k)} \sim \Sigma \frac{\mathbf{F}(\mathbf{m}_k)}{\mathbf{G}(\mathbf{m}_{k-1})} = [\mathbf{B}_m(\mathbf{m}_{k-1})] (\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_{ref})$$

	$\mathbf{B}_m$	$\mathbf{B}_m^{-1}$	Update of $\mathbf{B}_m^{-1}$ at each step
SM	$\mathbf{R}^T \mathbf{R}$	$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}^{-T}$	Not necessary
MS	$\mathbf{p}^k$	$[\mathbf{p}^k]^{-1}$	Easy
MSG	$\mathbf{W}_1^k \mathbf{R} \mathbf{W}_2^k$	$[\mathbf{W}_2^k]^{-1} \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{W}_1^k]^{-1}$	Easy
MGS	$\mathbf{R}_{MGS}^k$	$[\mathbf{R}_{MGS}^k]^{-1}$	Expensive

$\mathbf{P}, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$  は対角行列:

$$P_{ij} = \begin{cases} N_{ij} & (\text{when } i = j, N_{ij} \text{ is the number of neighboring models}) \\ -1 & (\text{when } i \neq j \text{ and } j \text{th model faces } i \text{th}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

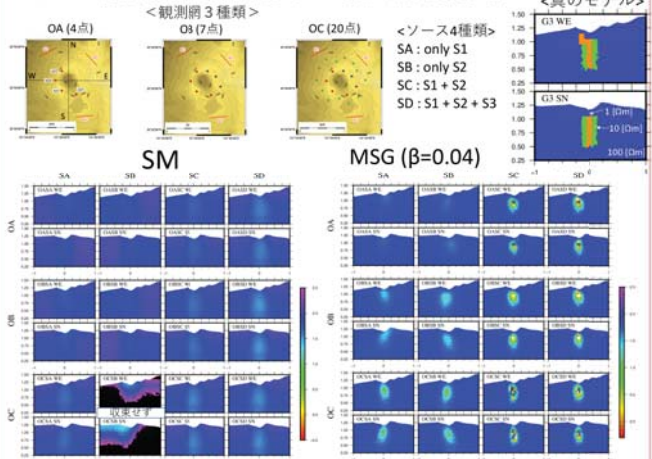
$$W_{1i} = \frac{\beta_{MS}^2}{[(m_i^{ref})^2 - m_i^{ref}]^2 + \beta_{MS}^2}$$

$$W_{2i} = \frac{\beta_{MSG}}{[(m_i^{ref})^2 - m_i^{ref}]^2 + \beta_{MSG}^2}$$

$\mathbf{R}$  は、Usui et al. (2017) によるものと同形で、モデルのラプラシアンに相当する作用素。 $\mathbf{R}$  はランクが行列の次元を下回るため、対角成分に微小量を加えて、逆行列を計算した (Kordy et al., 2016)。上の線形化の中で、MSとMSGは、各ステップで更新すべき行列が対角行列だけであるため、 $\mathbf{B}_m$  の更新計算が容易で、データ領域手法に應用が容易である。

## 4. 計算例

SMとMSGの結果の比較を紹介する。ハイパーパラメータ  $\lambda$  は、十分に大きな値から、規格化された RMS の減少に合わせて徐々に小さくする、Kordy et al. (2016) の手法を採用した。最初の  $\lambda$  には、 $\mathbf{J}_k \mathbf{B}_m^{-1} \mathbf{J}_k^T$  と  $(\mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d)^{-1}$  のスペクトル半径の比を10倍したものを用いている。真のモデルには、阿蘇中岳第一火口の下に、上昇するマグマが存在する場合は想定した。インバージョンはソース4種類×観測網3種類の計12パターンをSMとMSGで実施した。



## 3. 様々な正則化手法

表記は、Xiang et al. (2017) を参考にしている。Xiang et al. (2017) では、MGSは、 $\beta$  パラメータによる変化が大きく、MSGでは比較的  $\beta$  に依存しない正則化が実現できると、説明されている。

SM: Smoothest Model (e.g., Constable, 1987)

$$\Phi_m^{SM}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_m} (\nabla^2 [m_j - m_j^{ref}])^2$$

MS: Minimum Support (e.g., Grayver et al., 2013)

$$\Phi_m^{MS}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_m} \frac{(m_j - m_j^{ref})^2}{(m_j - m_j^{ref})^2 + \beta_{MS}^2}$$

MSG: Minimum Support Gradient (Xiang et al., 2017)

$$\Phi_m^{MSG}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_m} \left( \nabla \left[ \frac{(m_j - m_j^{ref})}{\sqrt{(m_j - m_j^{ref})^2 + \beta_{MSG}^2}} \right] \right)^2$$

MGS: Minimum Gradient Support (e.g., Zhang et al., 2012)

$$\Phi_m^{MGS}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_m} \left( \frac{\nabla(m_j - m_j^{ref})}{\sqrt{(m_j - m_j^{ref})^2 + \beta_{MGS}^2}} \right)^2$$

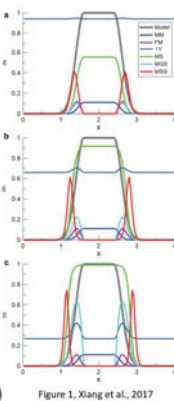


Figure 1, Xiang et al., 2017

## 5. まとめ

本研究では、よく用いられる正則化項の線形化手法を紹介し、データ領域インバージョンへの応用可能性を示した。また、MSGとSMについて、実際の計算結果を紹介した。その結果、MGSはデータ領域インバージョンでも、比抵抗異常境界の明瞭化に使用できる可能性が高いことが明らかとなった。今後、ハイパーパラメータ、ベータパラメータの決定法についてインバージョンの挙動を調べ、実データへの応用手法を確立することが必要である。

### 参考文献

- Grayver, A. V., Streich, R., & Ritter, O. (2013). Three-dimensional parallel distributed inversion of CSEM data using a direct forward solver. *Geophysical Journal International*, 193(3), 1432-1446.
- Kordy, M., Wannamaker, P., Maris, V., Cherkov, E., & Hill, G. (2016). 3-dimensional magnetotelluric inversion including topography using deformed hexahedral edge finite elements and direct solvers parallelized on symmetric multiprocessor computers-Part II: direct data-space inverse solution. *Geophysical Journal International*, 204(1), 94-110.
- Siripunvaraporn, W., Egbert, G., Lenburg, Y., & Uyeshima, M. (2005). Three-dimensional magnetotelluric inversion: data-space method. *Physics of the Earth and planetary interiors*, 150(1), 3-14.
- Usui, Y., Ogino, T., Aizawa, K., Kanda, W., Hashimoto, T., Koyama, T., ... & Kagiya, T. (2017). Three-dimensional resistivity structure of Asama Volcano revealed by data-space magnetotelluric inversion using unstructured tetrahedral elements. *Geophysical Journal International*, 208(3), 1359-1372.
- Xiang, Y., Yu, P., Zhang, L., Feng, S., & Utada, H. (2017). Regularized magnetotelluric inversion based on a minimum support gradient stabilizing functional. *Earth, Planets and Space*, 69(11), 158.
- Zhang, L., Koyama, T., Utada, H., Yu, P., & Wang, J. (2012). A regularized three-dimensional magnetotelluric inversion with a minimum gradient support constraint. *Geophysical Journal International*, 189(1), 296-316.