

電気・電磁探査法数値計算における Hankel 変換用デジタルフィルタの基礎研究

Basic study on the digital filters for Hankel transform in electric and electromagnetic modeling

上田 匠・光畑 裕司・内田 利弘 (産業技術総合研究所)

Takumi Ueda, Yuji Mitsuhashi and Toshihiro Uchida (Geological Survey of Japan, AIST)

ABSTRACT:

The role of digital filtering for the Hankel transform has been one of the most important part of numerical analysis of resistivity (DC) and electromagnetic (EM) methods. With the use of appropriate digital filters, one can calculate DC/EM responses for 1D geoelectrical models numerically. The purpose of our work is to provide accurate, fast, portable and cost effective digital filters. In this work, we apply direct deconvolution method suggested by Kong (2007) to obtain new filters and carefully examine accuracy of new filters by comparing with known analytical EM solutions for an homogeneous half space. As a result, the EM fields computed by developed filters show high computation performance and good agreements with analytical EM response for an homogeneous half space.

1. はじめに

本稿では電気・電磁探査法の数値計算で基本かつ重要な役割を担う Hankel 変換のデジタルフィルタについて、検討し開発を行った。電気・電磁探査法の数値解析は、無限均質空間から半無限均質大地、1次元層状構造そして2・3次元構造へと発展してきた。1次元構造における数値計算は、2・3次元計算においても、例えば積分方程式法においては「層状バックグラウンド構造」応答として必須であり、差分法や有限要素法においても、電磁場を一次場と二次場に分離して計算する場合などで必要とされる。1次元構造の数値計算においては、層状の地下比抵抗構造に対して円筒座標系を用いて支配方程式である Maxwell 方程式を解くことが一般的である。円筒系座標を用いる場合には、偏微分方程式は Bessel 関数の半無限積分を含む Hankel 変換の形で表されることが多く、この Bessel 関数を含む Hankel 変換を数値的に計算するために利用されるのが、いわゆるデジタルフィルタ法と呼ばれる手法である。デジタルフィルタ法は、電気・電磁探査法数値解析の基礎を担う極めて重要な手法であり、その研究開発も非常に多くの報告がなされている (Koefoed et al., 1972; Koefoed and

Dirks, 1979; Anderson, 1979, 1982; Murakami and Uchida, 1982; Anderson, 1989; Guptasarma, 1982; Mohsen and Hashsh, 1994; Guptasarma and Singh, 1997; Kong, 2007)。これらの研究と1980年代からの急速なパーソナルコンピュータの発達、普及により、デジタルフィルタ法を利用する数値計算も広く一般に普及した。その中でも Anderson (1979, 1982) により、USGS において無償一般公開された一連の Hankel 変換デジタルフィルタライブラリを用いた数値計算コードは世界中で広く開発、利用された。このフィルタは FORTRAN77 で記述されており、まず単精度 (Anderson, 1979) そして倍精度 (Anderson, 1982) が公開され、近年では Matlab/Octave への移植版も無償公開 (<http://infohost.nmt.edu/borchers/hankel.html>) され、広く利用されてきた。

しかし近年、USGS のフィルタが開発された当時に主要な対象になっていた電磁探査法とは異なる種類の電磁探査法が数多く開発、利用されるようになってきた。例えば、現在、海底石油資源探査での適用が広がりつつある、人工信号源を海中で曳航し海底に設置した受信機で電磁場を測定する海洋人工信号源電磁探査では、従来の人工信号源電磁探

査法が対象としてこなかったような海底下数 100 m から数 km を、これまで利用しなかったような低周波数 (0.125 ~ 数 Hz) で長い送受信機オフセット (100m ~ 10km 以上) で測定する (Eidesmo et al., 2002; Ellingsrud et al., 2002; Srnka et al., 2006)。このような新しい電磁探査手法においては、3次元解析が未完成であることはもちろん、1次元解析においても、これまでとは異なる特性をもった送受信機配置等を用いるため、デジタルフィルタの精度についても改めて検討しておく必要がある。さらに、測定機器の発展により、これまでは測定不可能だった微小応答も測定可能になり、それに伴い要求される数値計算の精度も高くなる傾向にあり、デジタルフィルタのさらなる高精度、高速化も必要である。このような状況の中、石油資源の海洋人工信号源電磁探査法数値計算への最適化を念頭においた新しい Hankel 変換用デジタルフィルタの研究開発の例として Kong (2007) よる報告がある。この研究では、理論解析解が得られる Hankel 変換を利用し、複数の初期条件によるフィルタ係数候補を算出し、理論解に最も適合する解を生成する係数を採用するという単純かつ効果的な方法を提案している。デジタルフィルタの開発が進められた 1980 年代は、精度の良いフィルタの計算そのものにコストが掛かっていたため、最終的な目的である地質構造解釈のための数値解析においては、公開された無償フィルタをそのまま利用することが通常であった。しかし、近年の急速な計算機能力の向上により、数値計算の対象となる探査仕様に応じて、最適なフィルタを適宜計算するということが現実性を帯びてきたと言える。Kong (2007) によると、電子メールで連絡を取ることで、計算済みの最適なフィルタを入手することが可能とあるが、このような手間をかけずとも、フィルタを生成するアルゴリズムを実装したコードを公開することで、誰でも簡単に、探査対象、仕様に応じたデジタルフィルタを得られることを本研究では目指した。

2. 基礎理論

Hankel 変換は一般に以下の式に示すように核関数と Bessel 関数の積に関する半無限積分で表される。

$$G(r) = \int_0^{\infty} K(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda \quad (1)$$

この変換が数値計算として難しい点は

1. 積分の上限が無限大に発散している
2. 被積分関数である Bessel 関数が振動する
3. 場合によっては核関数も振動したり、発散することがある

などが挙げられる。これを数値的に解く方法として広く用いられているのがデジタルフィルタ法である。計算方法の詳細はこれまでに発表された多くの文献で議論されているため、本稿では以下で基本的な計算の流れを説明するに留める。まず、以下の変数変換を行う。

$$r = \exp(x) \quad (2)$$

$$\lambda = \exp(-y) \quad (3)$$

したがって、積分範囲は

$$\int_0^{\infty} d\lambda \rightarrow \int_{\infty}^{-\infty} dy$$

となる。これを式 (1) に代入して

$$G(e^x) = \int_{\infty}^{-\infty} K(e^{-y}) J_n(e^{-y} e^x) (-e^{-y}) dy \quad (4)$$

を得る。ただし、

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{d(e^{-y})}{dy} \quad (5)$$

$$d\lambda = -e^{-y} dy \quad (6)$$

を利用した。両辺に e^x を乗じて

$$e^x G(e^x) = \int_{\infty}^{-\infty} e^x K(e^{-y}) J_n(e^{-y} e^x) (-e^{-y}) dy \quad (7)$$

$$= - \int_{\infty}^{-\infty} e^{x-y} K(e^{-y}) J_n(e^{x-y}) dy \quad (8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-y} K(e^{-y}) J_n(e^{x-y}) dy \quad (9)$$

したがって、これを整理して

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(y) h(x-y) dy \quad (10)$$

となる。ここで、以下の置き換えを利用した。

$$g(x) = e^x G(e^x) \quad (11)$$

$$k(y) = K(e^{-y}) \quad (12)$$

$$h(x-y) = e^{x-y} J_n(e^{x-y}) \quad (13)$$

これを数値計算においては離散コンボリューションの形で

$$g[j] = \sum_i k[i] h[j-i] \quad (14)$$

と表す。これは一種のフィルタ処理であり、そのためにこのような変形で Hankel 変換を数値的に処理することをデジタルフィルタによる Hankel 変換と呼ぶ。なお、一般に $k(y)$ を核関数、 $h(x-y)$ をフィルタ係数、あるいは単にデジタルフィルタと呼ぶ。

3. フィルタの計算と実装

前節で示したデジタルフィルタによる Hankel 変換においては、フィルタ係数をあらかじめ求めておくことが最重要事項である。係数の算出方法は、これまでも多くの手法が提案されており、また数値データ、あるいは計算プログラムとして公開されている。本研究では、その中でも比較的新しく、単純かつ高速なアルゴリズムによってフィルタ係数を算出している Kong (2007) の文献に基づき、計算を行うプログラムの開発と公開、そしてフィルタ係数そのものの公開を目指した。ここでは、

$$G(r) = \int_0^\infty K(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda \quad (15)$$

で示される Hankel 変換を離散コンボリューションへ変形する際に、

$$r = \exp(x) = \exp(an) \quad (16)$$

$$\lambda = \exp(-y) = \exp(-am) \quad (17)$$

という変換を利用する。ただし、 n および m はフィルタの範囲を決める連続した整数であり本稿ではフィルタ長と呼ぶ。また a はフィルタ長に乗じることでフィルタの絶対範囲を決める実数であり、フィルタ係数のサンプリング定数である。これによって、Hankel 変換は離散コンボリューションの

形で以下のように表される。

$$e^{an} G(e^{an}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k(e^{-am}) \left(e^{a(n-m)} J_n(e^{a(n-m)}) \right) \quad (18)$$

さらに

$$g(n) = e^{an} G(e^{an}) \quad (19)$$

$$k(m) = k(e^{-am}) \quad (20)$$

$$h(n-m) = e^{a(n-m)} J_n(e^{a(n-m)}) \quad (21)$$

のような変換を適用すれば、

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k[m] h[n-m] \quad (22)$$

となる。コンボリューションの可換性 (Hohmann (1987)) から、

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k[n-m] h[m] \quad (23)$$

を得る。Kong (2007) による離散コンボリューションからフィルタ係数を決定するための計算手順を参考にして、本稿で採用した係数算出手過程を以下にまとめる。

1. 解析的に解の得られる Hankel 変換を用意する
2. フィルタ長を決定する
3. サンプリング定数を任意の範囲と値で変化させて、右辺を解析解とした連立方程式を立てる。ただし、係数行列は既知の核関数、未知数がフィルタ係数となる
4. サンプリング定数毎に連立方程式を解く
5. 複数のフィルタ係数を、別の解析解に代入して Hankel 変換を数値的に解く
6. 最も小さな値まで計算できるサンプリング定数のフィルタ係数を採用する

以上の処理を、複数の異なるフィルタ長においておこなうことで、フィルタ長毎の最適なフィルタ係数を求められる。Kong (2007) は海洋人工信号源電磁探査に特化したフィルタを算出することを大きな目的としてたが、本稿では、探査手法や仕様に応じて利用者が自らの問題に最適なフィルタ

を算出できるプログラムそのものの提供を第一目的とする。なお、ここで示したフィルタ係数算出アルゴリズムは、コンボリューションで表された Hankel 変換を、異なるサンプリング係数ごとに列挙し、連立方程式の形で表すため、コンボリューション行列による表現とされる。また、本手法ではこのコンボリューション行列を係数行列とし、フィルタを未知ベクトル、右辺は既知の解析解とした、線形連立方程式とみなし、この連立方程式を解くことでフィルタを算出する。したがって、本手法は連立方程式の求解そのものに他ならず、また別の見方をすればコンボリューション行列の直接デコンボリューションであるとも言える。数値計算で最もコストがかかるのが、フィルタ長に等しいサイズの連立方程式を、サンプリング定数の変化数と同じ回数解く部分である。なお、係数行列は Hankel 変換の核関数そのものであり、密行列である。

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-c\lambda^2} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{2c} e^{-\frac{r^2}{4c}} \quad (24)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-c\lambda^2} J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{4c^2} e^{-\frac{r^2}{4c}} \quad (25)$$

ここで c は適当な整数であり、Kong (2007) に従って $c=3$ とした。式 (24) を用いて J_0 フィルタ係数の候補を算出し、以下の式 (26) を用いて、解析解との差が最小になるサンプリング定数に対応するフィルタ係数を決定した。 J_1 フィルタに関しては、すでに得られた J_0 フィルタで使用したサンプリング定数を使用し、式 (27) を解くことで導出した。

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\beta} e^{-\beta|z-z'|} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{-\gamma R}}{R} \quad (26)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{\beta} e^{-\beta|z-z'|} J_1(\lambda r) d\lambda = r \frac{e^{-\gamma R}}{R^3} (\gamma R + 1) \quad (27)$$

なお、係数と同時に、 λ を算出するための基本係数 λ_0 は以下のように、フィルタと同じ長さのベクトルとして計算し、あらかじめ保存しておく。実際

には λ_0 は以下の式で算出した。

$$r = e^{an} \quad (28)$$

$$\lambda = e^{-an} \quad (29)$$

$$n = \frac{\log r}{a} \quad (30)$$

$$\lambda = e^{-a(n-L:n+L)} = e^{-an} e^{a(L:-L)} \quad (31)$$

$$e^{-an} = (e^{an})^{-1} = r^{-1} \quad (32)$$

$$\lambda = r^{-1} (e^{aL} : e^{-aL}) \quad (33)$$

上記の変数変換を利用した上で、

$$\lambda = r^{-1} \lambda_0 \quad (34)$$

を用いて λ_0 を、係数の他に λ の基準として

$$\lambda_0 = (e^{aL} : e^{-aL}) \quad (35)$$

をあらかじめ保存しておく。これにより現在 Anderson (1989, 1982) のフィルタ係数プログラムを使っている既存コードへの移植性を向上させた。

4. 数値試験

数値試験として、Kong (2007) と同様、低比抵抗構造における電磁応答を対象に算出した新フィルタの精度と有効性を検証した。ここでは作成した動的適応型 Hankel 変換係数生成プログラムを用いて、フィルタ長を 61, 121, 241 と変化させたものを算出した。これらのフィルタを用いて半無限均質構造における鉛直磁気双極子信号源 (VMD) による電磁応答を計算した結果をデジタルフィルタリングによる数値解として、解析解と比較した。なお使用周波数は 0.25Hz、1.25Hz を用い、半無限構造の比抵抗は 1 ohm-m とした。Hohmann (1987) によれば、電場水平成分と磁場垂直成分は、

$$E_\phi = -\frac{\hat{z}_0 m}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda+u} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (36)$$

$$H_z = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3}{\lambda+u} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (37)$$

で与えられ、これらの式は以下のように変形できるため、解析解として計算が可能である。

$$E_\phi = -\frac{m}{2\pi\sigma r^4} \left\{ 3 - (3 + 3ikr - k^2 r^2) e^{-ikr} \right\} \quad (38)$$

$$H_z = \frac{m}{2\pi k^2 r^5} \left\{ 9 - (9 + 9ikr - 4k^2 r^2 - ik^3 r^3) e^{-ikr} \right\} \quad (39)$$

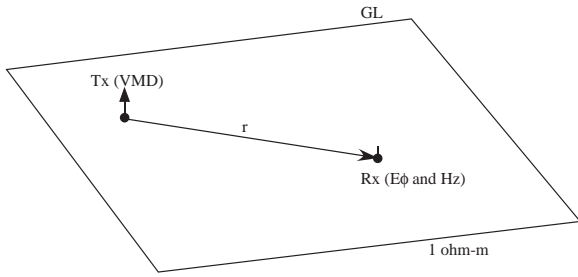


Fig.1 Sketch of an homogeneous half space model for verification of new filter accuracy.

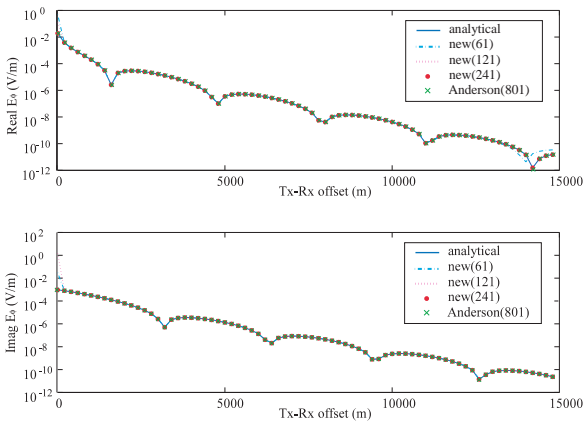


Fig.2 Horizontal components of the electric field generated by vertical magnetic dipole source with frequency 0.25Hz using several different length of digital filters. Top panel shows a real part and bottom panel presents an imaginary part.

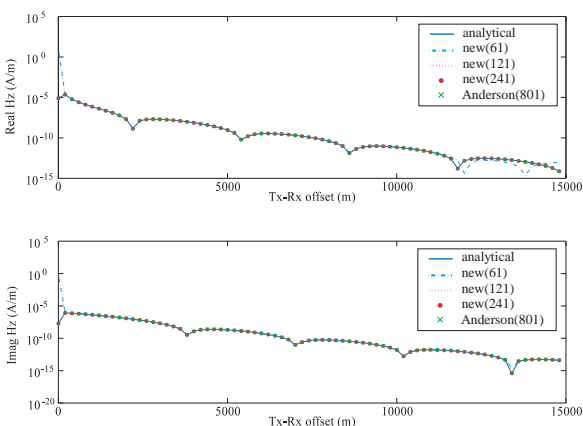


Fig.3 Vertical components of the magnetic field generated by vertical magnetic dipole source with frequency 0.25Hz using the several different length of digital filters. Top panel shows a real part and bottom panel presents an imaginary part.

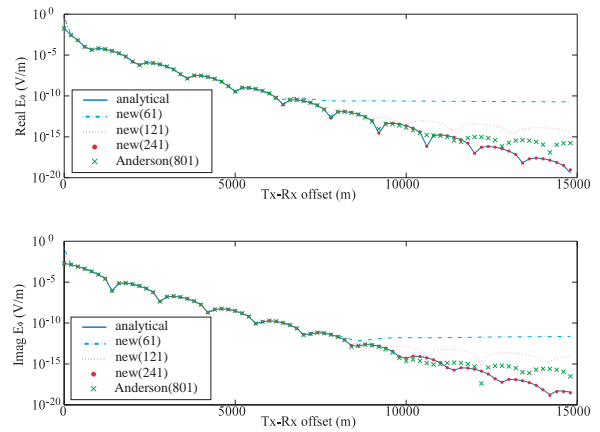


Fig.4 Horizontal components of electric fields generated by the vertical magnetic dipole source at frequency 1.25 Hz using the several different length of digital filters. Top panel shows a real part and bottom panel presents an imaginary part.

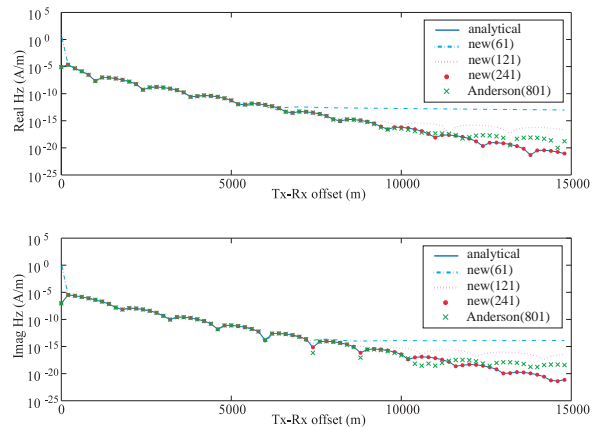


Fig.5 Vertical components of magnetic field generated by vertical magnetic dipole source with frequency 1.25Hz using the several different length of digital filters. Top panel shows a real part and bottom panel presents an imaginary part.

Fig. 2 から 5 に、異なる長さの新フィルタと Anderson (1982)(倍精度、フィルタ長 801、以下 Anderson801) を利用した計算結果を示した。Fig. 2 及び Fig. 3 は、それぞれ周波数 0.25Hz における電場水平成分と地場垂直成分であり、この条件では、全てのフィルタがほぼ同等の精度で解析解と良く一致していることがわかる。一方、Fig. 4 及び Fig. 5 は、周波数 1.25Hz における電場及び磁場の応答比較である。0.25Hz の場合とは異なり、フィルタ長が短い場合には、送受信機距離が短くても

解析解との相違が生じていることがわかる。具体的には、フィルタ長 61 が最も精度が悪く送受信機距離が 6km 付近で解析解との誤差が大きくなる。フィルタ長 121 及び Anderson801 では送受信機距離 10km 付近で、解析解からフィルタ長 241 では、検証した送受信機距離最長値である 15km 程度でも解析解と良く一致している。

以上より、新フィルタは、0.25Hz においては、短いフィルタ長でも既存の Anderson801 と同等の精度を保持できることや、周波数 1.25Hz では Anderson801 では解析解との誤差の生じる長い送受信機距離でも解析解と良く一致する応答が得られることがわかった。したがって、

1. 短いフィルタで、既存フィルタに匹敵する精度を得る
2. 既存フィルタでは誤差が生じる応答でも、精度を維持する

という目的を、この計算条件では達成できることがわかった。しかしながら、電磁応答は大地の比抵抗、送受信配置、そして周波数に複雑に依存しているため、この計算結果だけから汎用的な結論を導くことは難しい。一方で、本稿で述べたフィルタ計算は、フィルタ長 121 で約 5 秒、最長の 241 フィルタで約 10 秒 (いずれも Intel Core 2 Duo、2.66GHz) と非常に高速に動作するため、対象となる問題に応じてフィルタを生成することも容易である。現時点で、本稿で作成・利用したフィルタ係数 (フィルタ長 61,121,241) に関しては、メール等で連絡 (takumi.ueda@aist.go.jp 宛) があれば希望する利用者に配布する。フィルタを生成するプログラム (Matlab/Octave) に関しては、ソースコードの整備を行った後 2008 年夏頃に公開する予定である。

5. まとめ

電気電磁探査数値解析において基礎的な役割を担う Hankel 変換のデジタルフィルタについて、Kong (2007) の提案する手法に基づいたフィルタ計算コードの作成、及び生成した異なる長さのフィ

ルタについて精度検証を行った。本稿では、1ohm-m の低比抵抗地下構造において低周波数 (0.25 及び 1.25Hz) を利用した電磁探査における電磁応答を用いて、解析解とフィルタによる数値解の比較を試みた。その結果、0.25Hz では短いフィルタ長で既存フィルタと同程度の精度を得ることができ、また 1.25Hz では既存フィルタより短いフィルタ長で、より精度の高い結果を得ることができた。今後はフィルタそのものを公開すると共に、フィルタを生成するプログラムコードも公開することで、簡便に探査使用や要求精度に応じて臨機応変にフィルタを用意し使用できる環境を提供していきたい。また、この公開フィルタを使用した逆解析や 2・3 次元準解析の研究開発を続けていきたい。

参考文献

- Anderson, W. L., 1979, Numerical integration of related hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering: *Geophysics*, **44**, 1287–1305.
- , 1982, Fast hankel transforms using related and lagged convolutions: *ACM Transactions on Mathematical Software*, **8**, 344 – 368. Volume 8 , Issue 4 (December 1982).
- , 1989, A hybrid fast hankel transform algorithm for electromagnetic modeling: *Geophysics*, **54**, 263–266.
- Eidesmo, T., S. Ellingsrud, L. M. MacGregor, S. Constable, M. C. Sinha, S. E. Johansen, F. N. Kong, and H. Westerdahl, 2002, Sea Bed Logging (SBL), a new method for remote and direct identification of hydrocarbon filled layers in deepwater areas: *First Break*, **20**, 144–152.
- Ellingsrud, S., T. Eidesmo, S. Johansen, M. C. Sinha, L. M. MacGregor, and S. Constable, 2002, Remote sensing of hydrocarbon layers by seabed logging (SBL): Results from a cruise offshore Angola: *The Leading Edge*, **21**, 972–982.
- Guptasarma, D., 1982, Optimization of short digital linear filters for increased accuracy: *Geophysical Prospecting*, **30**, 501–514.
- Guptasarma, D. and B. Singh, 1997, New digi-

- tal linear filters for hankel j_0 and j_1 transforms: *Geophysical Prospecting*, **45**, 745–762. doi: 10.1046/j.1365-2478.1997.500292.x.
- Hohmann, G. W., 1987, Electromagnetic methods in applied geophysics, volume **1** of *Theory*, chapter Numerical modeling for electromagnetic methods of geophysics, 130–311. Society of Exploration Geophysicists.
- Koefoed, O. and F. J. Dirks, 1979, Determination of resistivity sounding filters by the wiener-hopf least-squares method: *Geophysical Prospecting*, **27**, 245–250.
- Koefoed, O., D. P. Ghosh, and G. J. Polman, 1972, Computation of type curves for electromagnetic depth sounding with a horizontal transmitting coil by means of a digital linear filter: *Geophysical Prospecting*, **20**, 406–420.
- Kong, F. N., 2007, Hankel transform filters for dipole antenna radiation in a conductive medium: *Geophysical Prospecting*, **55**, 83–89.
- Mohsen, A. A. and E. A. Hashsh, 1994, The fast hankel transform: *Geophysical Prospecting*, **42**, 131–139.
- Murakami, Y. and T. Uchida, 1982, Accuracy of the linear filter coefficients determined by the iteration of the least-squares method: *Geophysics*, **47**, 244–256.
- Srnka, L. J., J. J. Carazzone, M. S. Ephron, and E. A. Eriksen, 2006, Remote reservoir resistivity mapping: *The Leading Edge*, **25**, 972–975.