MT・CSMT3次元フォワード計算コードの開発

小山　崇夫（東京大学地震研究所）

Development of a numerical solver of EM induction equation in the three-dimensionally anomalous flat Earth

Takao Koyama (Earthquake Research Institute, Univ. of Tokyo)

We developed a fast and small-memory required numerical solver of EM induction equation in the 3-D anomalous flat Earth, by using an integral equation method. The conventional way of the integral equation method requires the order of magnitude of $N_xN_yN_z(N_z+\log_2(N_xN_y))$ multiplications for solve a linear equation and the order of magnitude of $N_xN_yN_z^2$ memories. In this study, we reduce the both multiplications and memories, the order of magnitude of $N_xN_yN_z\log_2(N_xN_y)$ and $N_xN_yN_z$, respectively, by using the variable separation for z direction in the Green's function for the 1-D layered Earth. In this paper, we briefly show the formulation of our method.

1．　はじめに

近年、さまざまな計算手法による3次元電磁誘導方程式の数値解法が提案されている。それらは有限差分法、有限要素法、積分方程式法におおよそ大別できる（Avdeev, 2005)。前者2つは、微分形式または積分形式の電磁誘導方程式を離散化し、励起ソースおよび境界条件を満たすように数値求解する方法である。複雑な形状を扱いやすいことや、扱う行列が粗な場合が多いため計算量が比較的少なく済むという利点がある一方で、十分遠方での自明な境界条件を数値的に満たすようにするために解析対象の領域よりも十分広い領域を計算対象とする必要がある。他方、積分方程式法は、境界条件をあらかじめ満たすような解析解（グリーン関数）の重ね合わせとして最終的な数値解を計算するため、不均質領域のみを計算対象とすればよいという利点がある一方で、扱う行列が一般に密なため計算量やメモリー量が大きくなるという欠点があり、いずれの手法も一長一短がある。

本研究では、積分方程式法による数値求解法における計算量とメモリー量の削減について考察を行った。積分方程式法は、対象とする3次元比抵抗構造における電磁誘導方程式

$$\nabla\times H=\sigma_{3D}E+J_{ext}$$

$$\nabla\times E=-i\omega\mu H$$

に対して、

$$\nabla\times H=\sigma_0E+\left\{J_{ext}+\left(\sigma_{3D}-\sigma_0\right)E\right\}$$

$$\nabla\times E=-i\omega\mu H$$

のように、グリーン関数が既知な構造σ_0についての方程式系に直し、Fredholm型第2種積分方程式

$$E=KJ_{ext}+K\left(\sigma_{3D}-\sigma_0\right)E$$

の形で解 E を表現する。ただし、K はグリーン関数を伴う積分核で、離散化した数値計算上では一般に密な行列となる。実際の電磁場の数値求解では、この E についての線形方程式を既存の線形計算ルーチン等に従って計算する。なお、pre-conditioner としては、積分核 K の条件数を著しく減少させる modified IDM (Singer, 1995)が非常に有効であることが知られており、本研究でもこれをそのまま用いたがそれについてはここでは議論しない。本論文では、1 次元成層構造の場合における積分核 K の表現を工夫することで、従来の方法(e.g. Avdeev et al., 1997)に比べ、3 次元計算の計算量・メモリー量をともに大幅に削減することができたので、それについて報告をおこなう。

2．　1 次元水平成層構造における電磁誘導方程式のグリーン関数

2－1．Avdeev et al. (1997)による積分方程式法の計算の高速化

以下、１次元水平成層構造におけるグリーン関数について考察する。x,y 方向を水平２方向、z 方向を鉛直下方とする。なお、グリーン関数の導出の詳細については、他の文献に譲る (e.g. Kaufman and Keller, 1983)。

角周波数 ω の外部電流ソース J_{ext} により生じる電場 E、磁場 H は下記の Maxwell 方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= \varsigma(z)E + J_{ext} \\ \nabla \times E &= \tau(z)H \end{aligned} \qquad (1)$$

ただし、

$$\varsigma(z) = \sigma(z) + i\omega\varepsilon(z)$$

$$\tau(z) = -i\omega\mu(z)$$

σ、ε、μ はそれぞれ電気伝導度、誘電率、透磁率で、各物性量は z 成分のみに依存し、かつ、それらは各層内では一定であるとする。時間依存性は $\exp(i\omega t)$ とする。磁流ソースにより生じる電場と磁場は、上式の電流ソースの場合から導かれる結果について E と H および ζ と τ をそれぞれ置換すればよいので、ここでは電流ソースの場合のみを考える。

式（1）を満たすように電流ソース J_{ext} により生じる電場 E を、既知のグリーン関数 G_E を用いて、下記のように体積積分表示できるとする。

$$E(x,y,z) = \iiint dx'\,dy'\,dz'\,G_E(x,y,z,x',y',z')J_{ext}(x',y',z') \qquad (2)$$

グリーン関数 G_E は構造（σ、ε、μ）と角周波数 ω に依存する。磁場 H についても同様の議論がなりたつので、以降 G_E についてのみ考える。

水平成層構造を考えているため、水平方向の座標の並進操作に対しグリーン関数の値は変わらないので、

$$G_E(x,y,z,x',y',z') = G(x-x', y-y', z, z')$$

と表せる。よって式（２）の x',y' 方向の積分は畳込み積分となり、それはグリーン関数およびソースの水平波数領域での値の積を空間領域に逆フーリエ変換したものと同値である。波数領域と空間領域との変換の際に FFT を使うと式 (2) の空間積分を直に行うよりも高速に計算処理でき

る(Avdeev et al., 1997)。

$$E(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\iint dk_x dk_y \exp(ik_x x)\exp(ik_y y)\left\{\int dz'\widetilde{G}(k_x,k_y,z,z')\widetilde{J}_{ext}(k_x,k_y,z')\right\} \quad (3)$$

ただし、

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(k_x,k_y,z,z') &= \iint dx'dy'\exp(-ik_x x')\exp(-ik_y y')G(x',y',z,z')\\ \widetilde{J}_{ext}(k_x,k_y,z') &= \iint dx'dy'\exp(-ik_x x')\exp(-ik_y y')J_{ext}(x',y',z')\end{aligned} \quad (4)$$

ここで、式(2)あるいは式(3)を解くために必要な乗算回数と要素数（メモリー量）についてみていく。x,y,z 方向の計算グリッド数をそれぞれ N_x, N_y, N_z 個とする。式（2）の空間積分を直に行うと、$N_x^2N_y^2N_z^2$ 回オーダーの乗算回数が必要である。一方、式(3)に従う場合、グリーン関数を水平波数領域で予め求めておく(式（4）上式)とすると、あとは式(3), (4)で各1度、計2度の周波数領域と空間領域の変換が含まれるが、各々2次元 FFT を使うと乗算回数は $N_xN_yN_z\log_2(N_xN_y)$ 回のオーダーとなる。残りは式（3）右辺 {} 内の z'についての積分であるが、この箇所での乗算回数は $N_xN_yN_z^2$ 回オーダーとなる。よって空間積分を直に行うのに比べ格段に計算量を削減できるが、x, y, z 方向に同程度のグリッド数がある場合は最後に述べた z'についての積分での計算回数が圧倒的に多く全体の計算時間を占めることになる。また、計算に必要なメモリー量は、電気伝導度 σや電場 E に必要な要素数が総グリッド数 $N_xN_yN_z$ 個オーダーであるのに対し、4成分が必要なグリーン関数の要素数 $N_xN_yN_z^2$ 個が最も多く占めるが、これは式（4）の表現のままでは、空間領域でも水平波数領域で表現した場合も変わらない。

そこで、本研究では z'についての積分の乗算回数を減らすことと、グリーン関数の表現に必要な要素数を減らすことの2点に以降着目する。

2－2．鉛直方向についての変数分離形を用いた更なる計算の高速化・省メモリー化

グリーン関数の具体的な形に若干ふれる。式（1）より、電場 E は各層内で下記の非斉次な3次元 Helmholtz 方程式を満たす。

$$\Delta E(x,y,z)+\varsigma(z)\tau(z)E(x,y,z)=-\left\{\tau(z)J_{ext}(x,y,z)+\frac{\nabla(\nabla\cdot J_{ext}(x,y,z))}{\varsigma(z)}\right\}$$

ソース項の表現・与え方については以降の議論ではあまり重要でないので、簡単のために

$$\Delta f(x,y,z)+\varsigma(z)\tau(z)f(x,y,z)=-\delta(x-x',y-y',z-z')$$

について以下進める、z と z'は同じ層内にあるとする。この3次元方程式系は水平2方向と鉛直方向とでは境界の有無が異なり、特に水平2方向については2階の微分演算子しか含まれていない。そこで、この式を鉛直方向(z)のみの1次元微分方程式に落とし簡便化することを考え、水平ラプラシアンの固有基底関数で展開して解くことにする。固有関数としては、円筒関数(e.g. Avdeev et al., 1997)などの複数の候補が考えられる。ここでは2－1．での議論との連携を優先し、x,y 方向に対する2次元フーリエ関数展開を用いるが、以降で議論する z と z'との変数分離を行うという

点ではどの固有関数を選んでも構わない。
2次元フーリエ変換により水平2方向を波数領域にすると、1次元 Helmholtz 方程式となる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}(k_x,k_y,z)}{\partial z^2} - \gamma^2(k_x,k_y,z)\tilde{f}(k_x,k_y,z) = -\delta(z-z')\exp(-ik_x x')\exp(-ik_y y')$$

ただし

$$\gamma^2(k_x,k_y,z) = k_x{}^2 + k_y{}^2 - \varsigma(z)\tau(z)$$

であるので、特解は

$$\tilde{f}(k_x,k_y,z) = \frac{\exp(-\gamma|z-z'|)}{2\gamma}\exp(-ik_x x')\exp(-ik_y y')$$

となり、

$$\tilde{f}(k_x,k_y,z) = \exp(\gamma z)\frac{\exp(-\gamma z')}{2\gamma}\exp(-ik_x x')\exp(-ik_y y') \qquad (z<z')$$

$$\tilde{f}(k_x,k_y,z) = \exp(-\gamma z)\frac{\exp(\gamma z')}{2\gamma}\exp(-ik_x x')\exp(-ik_y y') \qquad (z>z')$$

と、z と z'に対して変数分離形になる、前者はソースから上方に伝わる場、後者は下方に伝わる場である。現実の解は各層境界での反射・透過場を加えることになるが、同様に変数分離形の解の重ね合わせで表現できる。ただし電磁場が水平成分と鉛直成分とで層境界での連続条件が違うために、反射・透過係数の異なる2種類のモード（例えば、トロイダルモードとポロイダルモード）が分離するので、ある場所での場は上方および下方に位置するソースに由来する各々2 モードの場、の計4通りの場の足し合わせとして表すことになる。また、 z と z'とが異なる層にある場合についても同様である。以上のことから、水平波数領域でのグリーン関数を、

$$\tilde{G}(k_x,k_y,z,z') = \sum_{l=1}^{4}\tilde{G}_l^1(k_x,k_y,z)\tilde{G}_l^2(k_x,k_y,z')$$

の形で書き表せることがわかり、式（3）は

$$E(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint dk_x dk_y \exp(ik_x x)\exp(ik_y y)\left\{\sum_{l=1}^{4}\tilde{G}_l^1(k_x,k_y,z)\int dz'\tilde{G}_l^2(k_x,k_y,z')\tilde{J}_{ext}(k_x,k_y,z')\right\}$$

となる。ただし、場はソース領域を跨ぐと伝播方向が変わるため、{} 内の z'に関する積分区間（区間上端または下端）は変数 z で区切ることになる。これより、z'の積分に要する乗算回数は $N_xN_yN_z$ 回オーダーとなり、先述の乗算回数よりも格段に削減されることになる。
また、グリーン関数自体について、空間領域ではハンケル変換による積分等の準解析的な表現をする必要があるためグリーン関数自身の計算量が膨大であったが、水平波数領域では先述のように初等関数を用いて解析的に表せるためその計算量も大幅に削減される。グリーン関数の要素数についても、Avdeev et al.(1997)に準じて $\tilde{G}(k_x,k_y,z,z')$ の形式でグリーン関数を表現した場合は、

$N_xN_yN_z^2$個オーダーが必要であったのに対し、$\widetilde{G}_l^1(k_x,k_y,z)$と$\widetilde{G}_l^2(k_x,k_y,z')$とに分けることで、要素数が総グリッド数$N_xN_yN_z$個オーダーとなり、必要なメモリー量も大幅に削減できることになる。

3．　数値計算コード化

数値計算においては、式（3）、（4）について、離散化して近似表現をする。

式（4）より、x, y 方向にフーリエ変換するため、構造は格子状にグリッド化することになる。FFT を用いるので x 方向および y 方向にはそれぞれ等幅（Δx および Δy）で区切る。z 方向は非等幅に区切っても構わない。

１つのグリッド内では、電磁場値および比抵抗値は一定であると近似し、グリッド内の体積平均値でその値を代表することにする。実際の計算に際しては、その近似が十分成り立つようにグリッドサイズを考慮する必要がある。また、そのような近似のもとでは式（3）において、z'方向の積分、および z 方向の平均化操作はグリーン関数のみにかかることになるが、先述した通りグリーン関数自身が初等関数を用いて表現できるため、これらは解析的に計算できる。

式（3）における水平波数領域での離散化について、こちらも FFT を用いるので kx, ky 方向に等幅（$2\pi/Nx/\Delta x$ および $2\pi/Ny/\Delta y$）で区切る。波数区間($2\pi/Nx/\Delta x$*i, $2\pi/Nx/\Delta x$*(i+1))および($2\pi/Ny/\Delta y$*j, $2\pi/Ny/\Delta y$*(j+1))においては(i, j は整数)、電磁場およびグリーン関数の値は一定であると近似し、$kx=2\pi/Nx/\Delta x$*(i+1/2), $ky=2\pi/Ny/\Delta y$*(j+1/2)での値で代表することにする。

積分区間は kx, ky 両方向について実際は（$-\infty$, ∞）であるが、グリッド幅より十分短い波長成分は表現しないものと近似し、ここでは Avdeev et al.(1997)に倣い、($-2\pi/\Delta x$, $2\pi/\Delta x$)および($-2\pi/\Delta y$, $2\pi/\Delta y$)を計算で扱う波数範囲とした。

以上のように積分方程式を離散化・行列形式で表現した上で、線型方程式の求解アルゴリズムを適用して数値計算を行う。ここでは、求解アルゴリズムとして GPBi-CG を用いた。また、行列の pre-conditioner としては、modified IDM (Singer, 1995; Avdeev et al., 1997)を用いた。離散フーリエ変換の計算においては、基数２以外でも比較的効率良く高速化される FFTW ライブラリを使用した。

特異な外部電流ソース項の入力について、人工電磁探査などで用いられる、点電流（電荷ダイポール）・点磁流や線電流のように、グリッド幅（あるいは計算対象とする波長）より著しく小さい水平スケールをもつソースの入力においては、別の取り扱いをする必要がある。ひとつには、特に点電流ソースでは、水平成層構造において励起される電磁場を低次のハンケル変換を用いて準解析的に表せるので、離散ハンケル変換計算ルーチンを用いて精度良く１次場を計算する方法がある。しかし、先述のようにグリッド幅より十分短い波長は考慮しないものとし、ここでは１次場に平滑処理を行う方法をとることにする。

点電流や直線電流では、式（4）から波数成分が解析的に求まるので、ここではそれらに先述の水平波数の計算範囲でカットオフ処理をすることで平滑化を行った。その際には、ギブス現象を避けるため hanning ウィンドーによるローパスフィルターを用いた。なお、鉛直 z 方向について

は、グリッドが非等幅間隔でもよく、また解析的に表せるので特別な処理を行う必要はない。
以上の手順を用いる特異なソースとして、点電流、点磁流、水平直線電流およびそれら複数の足し合わせ、鉛直直線電流の入力に対応した。特に点電流、点磁流入力は MT などでのインバージョンの際に、相反定理を使う箇所で今後利用することができる。また水平直線電流入力も、CSMT での利用だけでなく、ネットワークＭＴなどの長基線の電場観測において、インバージョンを行う際に同様に利用できる。

参考文献

Avdeev, D. B., A. V. Kuvshinov, O. V. Pankratov, and G. A. Newman, High-performance three-dimensional electromagnetic modeling using modified Neumann series. Wide-band numerical solution and examples, *J. Geomag. Geoelectr., 49*, 1519-1539, 1997.

Avdeev, D. B., Three-dimensional electromagnetic modeling and inversion from theory to application, *Surveys in Geophysics, 26,* 767-799, 2005.

Kaufman, A. A., and G. V. Keller. *Frequency and Transient Soundings*, Elsevier, 1983.

Singer, B. Sh., Method for solution of Maxwell's equations in non-uniform media, *Geophys. J. Int., 120*, 590-598, 1995.