

一様磁化した三軸不等楕円体の作る磁場

笹井洋一 東京都総合防災部

Magnetic Field Produced by a Uniformly Magnetized Triaxial Ellipsoid

Yoichi SASAI

Disaster Prevention Division, Tokyo Metropolitan Government

Abstract

KELLOGG (1929) gave the gravity potential produced by a triaxial ellipsoid with uniform density. The magnetic potential of a uniformly magnetized ellipsoid with the same shape can be obtained with the aid of Poisson's relation by differentiating the gravity potential. Hence the magnetic field of a uniformly magnetized triaxial ellipsoid is presented. It is expressed by incomplete elliptic integrals in which we need Cardano's algorithm for a cubic equation in order to determine the necessary parameters. The formula is essentially identical to the one obtained by CLARK *et al.* (1986). It is particularly useful to interpret some volcanomagnetic changes due to the thermal-magnetic effect. The FORTRAN program will be open to public elsewhere.

1 はじめに

一様磁化した簡単な形の磁性体の磁場公式があれば便利だ、という経験をお持ちの方も多いだろう。特に火山電磁気学の分野では、とにかく双極子で近似して山体の温度変化などを議論する時代は、1990年代前半で終わってしまった。観測点が増えて、いわゆる near-field で多点観測するため、源泉の形が効いてしまうからである。京大阿蘇のグループが追求しているような、ヘリコプターによる数千点の観測データを共役勾配法で一気にソース・インバージョンして、源泉の時間変化を議論するというのもひとつの方向である。しかし過去20年間で確立された手法は、10数点から数10点の磁気点を用いて、ソース・サイズの数分の1位の測点間隔で繰り返し磁気測量で時間変化を出す—三宅島・草津白根山・安達太良山などで地磁気観測所のグループが成果を上げているやり方である。このような場合、源泉のおおまかな形(10個以下のパラメータで決まる)を与えて、その磁化またはサイズの変化を(擬似)インバージョンで求めることが可能となる。三軸不等の楕円体は直方体と同じく、9個のパラメータ(中心座標、3軸の長さ、ひとつの軸の方位と傾き角、平均磁化)で指定できるが、近接して観測する場合にとがった角が作る見掛けの局所的異常を生じない、という利点がある。

私は1990年代後半の伊豆半島東部で、楕円体の磁場公式を必要とする機会に遭遇した(笹井・他, 2001)。10数点の全磁力連続観測点で、群発地震に伴う熱消磁現象と思われる変化を検出し、それを解釈するために地下浅部で数℃の温度上昇をした岩体の作る磁場を計算したい、と考えた。文献探しを充分やった訳ではないが、三軸不等楕円体の磁場を論じた論文は見当たらなかった。そこでたびたびお世話になった KELLOGG(1929) によるポテンシャル論の教科書に、

一様密度の楕円体を作る重力ポテンシャルの公式を見つけ出し、それを微分してこの問題の磁場公式を導いた。

CA研究会に発表を申し込んだ段階で、西田泰典博士(北大)から MINAKAMI(1940)や佐久間・村瀬(1956)の論文を教えていただいた。彼等の仕事は火山体を回転楕円体で近似し、平均帯磁方向や強度を求めるというものである。これらは伏角計(デ IPP・サークル)を使用して、観測精度は1分という時代の成果である。しかしその発想はプロトン磁力計による精密くり返し磁気測量の狙いと全く同じである。

CA研究会での発表当日、大熊茂雄博士(産総研)から CLARK *et al.*(1986) という論文があることを教えて頂き、かつそのコピーを送って頂いた。彼らは三軸不等の楕円体が密度一様な場合の重力、一様磁化している場合の磁場を与える公式を導いており、その導出は KELLOGG(1929)を出発点とした点で、私のやり方と全く同一であり、少し表現式が異なるに過ぎない。という訳で本論の目的には、CLARK *et al.*(1986)の論文を紹介すれば充分である。しかしこの論文が日本では産総研でしか閲覧できないらしいことと、プログラムはHPのポケコン用の言語で書かれており、現在では使いにくいという難点がある。そこで私の得た結果とプログラムを公開しておくのも、CAグループの皆さんには便利であろうと思って、このメモを書くことにした。なおプログラムの公開については、別途適切な方法を考えたい。

2 定式化

一般の三軸不等楕円体の方程式は次式で与えられる。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (c^2 < b^2 < a^2) \quad (1)$$

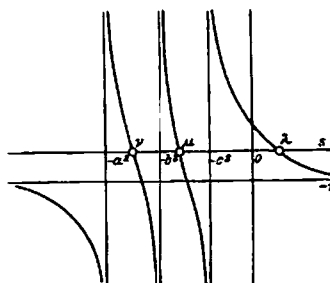
なお回転楕円体は $a = b$ の場合扁球楕円体 (oblate spheroid, ワッフル型), $b = c$ の場合偏長楕円体 (prolate spheroid, ラグビーボール型) と呼ばれる。

以下の定式化には楕円体座標を用いるのでその定義を導入する。

$$f(s) = \frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} - 1 \quad (2)$$

$$\varphi(s) = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s) \quad (3)$$

方程式 $f(s) = 0$ の根は第1図のグラフから分るように3つあり、大きい順に λ, μ, ν とする。これらは x, y, z の関数である。逆に λ, μ, ν を与えて一義的に x, y, z を決めるようにも定義できる。これは楕円関数で与えられるが、ここでは触れない。



第1図 曲線 $f(s)$ と方程式 $f(s) = 0$ の3つの実根。 Fig. 1 The curves for $f(s)$ and three roots for the equation $f(s) = 0$.

任意の s に対する方程式 $f(s) = 0$ は焦点を共有する二次曲面群を表す.

1) $s = \lambda$ ($-c^2 < \lambda$): 楕円面

2) $s = \mu$ ($-b^2 < \mu < -c^2$): 1 葉双曲面

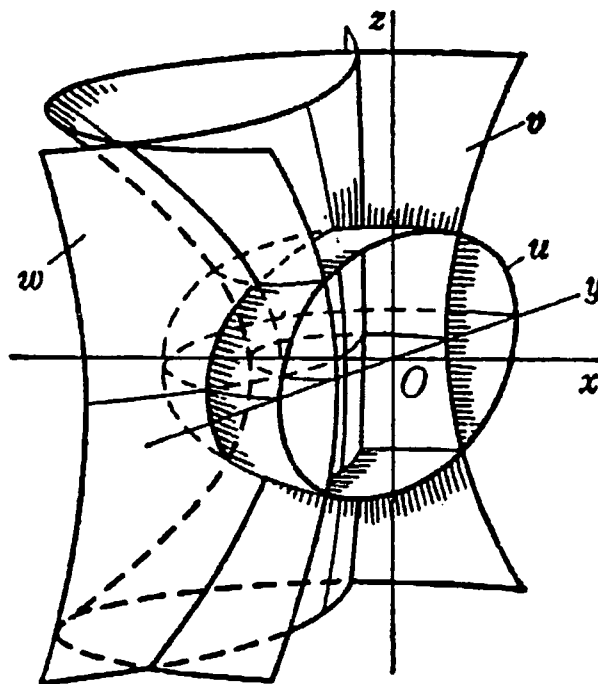
3) $s = \nu$ ($\nu < -a^2$): 2 葉双曲面

この (λ, μ, ν) を (u, v, w) と置き換えたものを楕円体座標と呼び, 第2図のような直交曲線座標系を作る. ここで新しい座標系の線素は次の微分方程式で定義される.

$$du = \frac{d\lambda}{\pm 2\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad dv = \frac{d\mu}{\pm 2\sqrt{-\varphi(\mu)}}, \quad dw = \frac{d\nu}{\pm 2\sqrt{\varphi(\nu)}} \quad (4)$$

上記の微分方程式の解として, 次のものを採用する.

$$u = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}, \quad v = \frac{1}{2} \int_{-b^2}^{\mu} \frac{ds}{\sqrt{-\varphi(s)}}, \quad w = \frac{1}{2} \int_{-c^2}^{\nu} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}} \quad (5)$$



第2図 楕円体座標

Fig. 2 The elliptic coordinates.

一様な楕円体の重力ポテンシャルは次の積分によって求められる.

$$U = G \lim \Sigma \frac{\rho_0 \Delta V}{r} = \rho_0 G \lim \Sigma \frac{\bar{p} \Delta S \Delta u}{\bar{u} r} = \rho_0 G \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} \iint_S \frac{p dS}{r} du \quad (6)$$

ここで楕円体の密度は ρ_0 , 万有引力定数を G とする.

楕円体座標でこの積分を実行すると, 楕円体の外部では

$$U_e = \pi abc \rho_0 G \int_{\lambda}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right] \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}} \quad (7)$$

前述したように、 λ は三次方程式 $f(s) = 0$ の最大の根である。ここで $\varphi(s)$ は三次式であるから、上式は不完全楕円積分に帰着する。なお回転楕円体の場合は a, b, c のいずれか2つが等しいので、平方根の中が一次式となり、積分は初等関数で表される。(7)式を書き直すと

$$U_e = \pi abc \rho_0 G [D(\lambda) - A(\lambda)x^2 - B(\lambda)y^2 - C(\lambda)z^2] \quad (8)$$

ここで

$$A(\lambda) = \frac{2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}} k^2} [F(k, \vartheta) - E(k, \vartheta)] \quad (9)$$

$$B(\lambda) = \frac{2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}} k^2 k'^2} \left[E(k, \vartheta) - k'^2 F(k, \vartheta) - k^2 \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \right] \quad (10)$$

$$C(\lambda) = \frac{2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}} k'^2} \left[\frac{\sin \vartheta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}{\cos \vartheta} - E(k, \vartheta) \right] \quad (11)$$

$$D(\lambda) = \frac{2}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} F(k, \vartheta) \quad (12)$$

なお $\sin \vartheta = \sqrt{(a^2 - c^2)/(a^2 + \lambda)}$ ($0 < \vartheta \leq \pi/2$), $k = \sqrt{(a^2 - b^2)/(a^2 - c^2)}$ であり、 F と E は第一種、第二種不完全楕円積分：

$$F(k, \vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k, \vartheta) = \int_0^\vartheta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (13)$$

ここまですが KELLOGG(1929) によって得られた成果である。

一様磁化した楕円体の磁気ポテンシャル V_k は以下の Poisson の関係式から求める。

$$V_k = -\frac{J_k}{\rho_0 G} \times \frac{\partial U}{\partial x_k} \quad (k = x, y, z) \quad (14)$$

$\vartheta = \vartheta(\lambda)$, $\lambda = \lambda(x, y, z)$ の関係を利用して上記の微分を行うと、

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi abc J_x \times \\ &\quad \left[\left\{ \frac{1}{a^2 + \lambda} - \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} - \frac{y^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} - \frac{z^2}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \right\} \frac{x}{g(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{\phi(\lambda)}} \right. \\ &\quad \left. + x A(\lambda) \right] \\ &= 2\pi abc J_x x A(\lambda) \end{aligned}$$

のように、著しく簡単化される。最終的に磁気ポテンシャルは次式で与えられる：

$$\frac{V_x}{2\pi abc J_x} = x A(\lambda), \quad \frac{V_y}{2\pi abc J_y} = y B(\lambda), \quad \frac{V_z}{2\pi abc J_z} = z C(\lambda) \quad (15)$$

(15) 式を微分して、一様磁化した磁性体の作る磁場が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{X_x}{2\pi abc J_x} &= -A(\lambda) + \frac{2x^2}{g} \frac{1}{(a^2 + \lambda)^2} \frac{1}{\sqrt{\phi(\lambda)}}, & \frac{X_y}{2\pi abc J_y} &= \frac{Y_x}{2\pi abc J_x}, \\ \frac{Y_x}{2\pi abc J_x} &= \frac{2xy}{g} \frac{1}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} \frac{1}{\sqrt{\phi(\lambda)}}, & \frac{Y_y}{2\pi abc J_y} &= -B(\lambda) + \frac{2y^2}{g} \frac{1}{(b^2 + \lambda)^2} \frac{1}{\sqrt{\phi(\lambda)}}, \\ \frac{Z_x}{2\pi abc J_x} &= \frac{2xz}{g} \frac{1}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \frac{1}{\sqrt{\phi(\lambda)}}, & \frac{Z_y}{2\pi abc J_y} &= \frac{2yz}{g} \frac{1}{(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \frac{1}{\sqrt{\phi(\lambda)}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{X_z}{2\pi abcJ_z} = \frac{Z_x}{2\pi abcJ_x}, \quad \frac{Y_z}{2\pi abcJ_z} = \frac{Z_y}{2\pi abcJ_y}, \quad \frac{Z_z}{2\pi abcJ_z} = -C(\lambda) + \frac{2z^2}{g} \frac{1}{(c^2 + \lambda)^2} \frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} \quad (17)$$

ここで

$$g = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda}, \quad \varphi(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \quad (18)$$

三次方程式の一般解 (Cardano 法) と不完全楕円積分のサブルーチンを用いて、簡単にこれらの磁場成分を計算できる。

3 計算例

フィリピン・ルソン島の首都マニラから南方 60km に、タール火山がある。フィリピン火山地震研究所 (Philippine Institute of Volcanology and Seismology: PHIVOLCS) はこの火山を始め、ピナツボ、マヨン等々の活動的火山の監視と活動予測、警報発令の責務を負っている。IUGG 傘下 3 協会の Inter-Associations Working Group である EMSEV (ElectroMagnetic Studies of Earthquakes and Volcanoes, Chair: 上田誠也東海大教授) では、PHIVOLCS に協力して 2005 年 1 月以来、タール火山において電磁気的手法による火山活動監視観測を開始した (HARADA *et al.*, 2005)。この火山はカルデラ湖であるタール湖のほぼ中央にある VOLCANO 島で噴火を繰り返し、「世界で最も低く、しかし危険な火山」とされている。1966 年ベース・サージ噴火はこのタイプの活動が最初に記載された例として名高い。

2005 年 1 月に繰り返し磁気点 20 数点を設置したが、特に中央火口湖の付近では、わずか 5 日間で数 nT の有意な全磁力増加を観測、2 月の再測量で 10 数 nT の変化を面的に検出した。これに伴い、植生の枯死や、湖面での蒸気沸騰、ガス放出が起こり、きわめて短期間に地表近くで温度上昇があったと思われる。

第 1 表 タール火山の磁氣的諸量と円盤および水平な扁平楕円体の形状パラメータ。

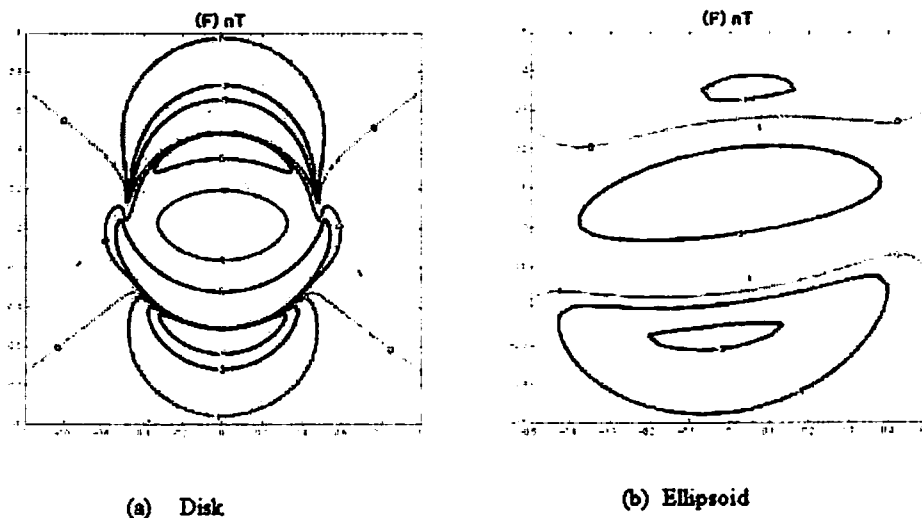
Table 1: Geomagnetic parameters around Taal volcano and shapes of a thin disk and a flat EW-elongated ellipsoid.

Geomagnetic inclination	14°
Geomagnetic declination	0°
Magnetization change	-0.1 A/m
Depth of the top surface	50 m
Sensor height above the ground	2.5 m
Thickness of the disk	50 m
Radius of the disk	500 m
Length of <i>a</i> axis	500 m
Length of <i>b</i> axis	250 m
Length of <i>c</i> axis	25 m
Orientation of <i>a</i> axis	N 80° E

HARADA *et al.* (2005) は、地中のごく浅い所で薄い円盤状に地温上昇が起こった場合に期待される全磁力変化を計算し、量的に観測をほぼ説明できるとした (第 3(a) 図)。モデルのパラメー

タと磁氣的諸量を第1表に示す。タール火山の平均帯磁は、磁気測量から 5A/m 程度と推定されるので、 -0.1A/m という磁化は 10°C くらいの温度上昇で実現する。第3(a)図では円盤の縁のあたりに、局所的に正負の全磁力異常が現れる。これは円盤の尖った角の作る磁場であって、実際の地下でこのように鋭角を持った熱消磁域は出現しないであろう。この図は地上 2.5m の平面上の全磁力分布を示している。火口内の観測では、北側は火口壁にさえぎられて観測点が無く、南側の観測点はより高台に位置するので、このような局所的な正負異常は現れなかった。

第3(b)図に、水平で平べったく、東西に長い楕円体の作る全磁力の分布を示す。モデルの形状パラメータは同じく第1表に与えてある。中央火口湖東岸に形成された熱消磁域はこの形に近いものと推定される。3(a)図に比べて磁性体直上の全磁力変化が卓越して、実際の観測結果を良く説明する。楕円体の磁場公式は、火山体内部で生じた熱消磁による場を表現するのに適したもののひとつと言えるだろう。なお不完全楕円積分のサブルーチンは、大型計算機用に開発・公開されているものを、パソコン向けに少し手直したものを使用した。



第3図 (a) 薄い消磁された円盤の作る全磁力. (b) 扁平で東西に長い楕円体の作る全磁力
Fig. 3. (a) Total intensity by a thin demagnetized disk. (b) Total intensity by a flat EW-oriented ellipsoid.

イタリアのエトナ火山観測所(カターニャ)の研究グループは、ピエゾ磁気効果、界面動電現象、熱磁気効果等々の磁場計算のためのプログラム・パッケージを作成する計画を持っている(Gilda Currenti, 私信)。実はその中身のかなりの部分は、日本のCAグループ研究者の諸成果である(村上英記, 大志万直人, 坂中伸也, 宇津木充, 大久保綾子の皆さんや私)。ただし彼らはこれらのプログラムを組み込んで、遺伝的アルゴリズムを用いたソース・インバージョンを行うことを狙っている。このようなパッケージの必要性は認めざるを得ないので、彼らに協力

する形でその実現を目指したい。円錐台についての力武公式や本稿の結果も、その一部に含まれることになろう。

謝辞 西田泰典さんと大熊茂雄さんには文献を教えて頂いた上に、色々議論して頂きました。記して感謝いたします。

References

- CLARK, D. A., S. J. SAUL, D. W. EMERSON, 1986, Magnetic and gravity anomalies of a triaxial ellipsoid, *Exploration Geophysics*, **17**, 189-200.
- HARADA, M., J. P. SABIT, Y. SASAI, P. K. B. ALANIS, J. M. CORDON Jr., E. G. CORPUZ, J. ZLOTNICKI, T. NAGAO, J. T. PUNONGBAYAN, 2005, Magnetic and electric field monitoring of Taal volcano, Philippines, Part I: Magnetic measurements, *Proc. Japan Acad.*, **81**, Ser. B, 261-266.
- KELLOGG, O. D., 1929, *Foundation of Potential Theory*, reprinted in 1967 from the first edition, Springer-Verlag, 384pp.
- MINAKAMI, T., 1940, Magnetic surveys of volcano Asama (Part 2), *Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. Tokyo*, **18**, 178-251.
- 佐久間修三, 村瀬勉, 1956, 北海道火山の地球物理学的研究 (その1) 北海道火山の地磁気伏角測量概報, 北海道大学地球物理研究報告, **4**, 1-24.
- 笹井洋一, 大志万直人, 本蔵義守, 石川良宣, 小山茂, 上嶋誠, 2001, 伊豆半島東部地域の全磁力観測 (1976 - 2000 年) — 四半世紀を振り返る —, CA 研究会 2001 年論文集, 71-81.