

地球表面電場変動は外核表面流の推定に有用か？

浅利晴紀・清水久芳・歌田久司（東京大学地震研究所）

On the applicability of geoelectric data for probing fluid motion at the core surface

S. ASARI, H. SHIMIZU, and H. UTADA

Earthquake Research Institute, University of Tokyo

はじめに

地球磁場は様々な時間スケールで変動する（0.1 秒–数十万年）が、このうち数十年–数百年スケールの変動（SV）は外核流体の流れによる磁場の移流に起因すると考えられている (Bloxham and Gubbins 1985)。SV の観測から外核流体の流れの分布を推定することは外核表面に限って可能であり、そのモデルはダイナモシミュレーション (Kuang and Bloxham 1997) やコア-マントル間の熱的・力学的相互作用 (Bloxham and Gubbins 1987; Jackson et al. 1993) に対する制約となる。そのためより多くのデータに基づく信頼できる外核表面流モデルを作成することは地磁気の成因・進化のみならず地球深部の物性・構造・ダイナミクスを理解する上で非常に重要である。

SV をデータとした外核表面流の推定は逆問題であり、これまでの研究では以下のような仮定のもとで行われている (Bloxham and Jackson 1991)。

- コア-マントル境界 (CMB) は外核の平均半径 ($c = 3485\text{km}$) を半径とした球面であるとする (CMB の扁平および凹凸は最大で数 km 程度)。また、外核表面流 \mathbf{u}_H は CMB 直下のエクマン境界層 (厚さ $\delta \sim 0.1\text{m}$) の下端における水平方向の流れとする。CMB に垂直な方向の流れはない (地球中心を原点としてマントルに固定された極座標系 (r, θ, φ) において $u_r = 0$, $\mathbf{u}_H \equiv \hat{\theta}u_\theta + \hat{\varphi}u_\varphi$, $\hat{\cdot}$ は単位ベクトルを表す)。
- \mathbf{u}_H は大局的な分布のみを持つとする (流れの水平空間スケール $L \sim 1000\text{km}$)。
- マントルは絶縁体であるとして、地球上で観測されたポテンシャル磁場 ($\mathbf{B}_0 = -\nabla V$) を CMB まで外挿することを許す (downward continuation)。実際、マントルの電気伝導度 $\sigma_M \sim 1\text{Sm}^{-1}$ とし

て空間スケール L に対して電磁場拡散の時間スケールは $\tau_{diff} \sim 10^6\text{s}$ であり、SV の時間スケール ($\tau_{SV} \sim 10^9\text{s}$) に比べて十分に小さい。

- 外核では磁場が流体に凍結されているとする (frozen-flux approximation)。外核の電気伝導度が十分に高いため ($\sigma_C \sim 10^6\text{Sm}^{-1}$)、磁場の拡散の影響は移流に比べて小さい (磁気レイノルズ数 $R_m \sim 500$)。

用いる方程式は Frozen-flux approximation により拡散項を無視したインダクション方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

の半径方向成分

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} + \nabla_H \cdot (\mathbf{u}_H B_r) = 0 \quad (2)$$

である ($\nabla_H \equiv r^{-1}(\hat{\theta}\partial_\theta + \hat{\varphi}\csc\theta\partial_\varphi)$)。ここで (2) 式の導出には $u_r = 0$ と連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を用いた。CMB において半径方向の磁場 B_r とその時間変化 $\partial_t B_r$ が与えられれば、外核表面流 \mathbf{u}_H が推定できるということになる。

以上の方法による外核表面流の推定には 2 つの困難が伴う。一つは理論的な問題であり、もう一つは観測による問題である。第 1 の問題は、既によく知られている逆問題の解の任意性についてである (トロイダル問題 Backus 1968)。(2) 式を満たすある解 \mathbf{u}_H があるとき、球面上の任意のスカラー関数 $\Phi(\theta, \varphi)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_H B_r &= \mathbf{u}_H B_r + \mathbf{v}_H B_r, \\ \mathbf{v}_H B_r &\equiv -\mathbf{r} \times \nabla \Phi \end{aligned} \quad (3)$$

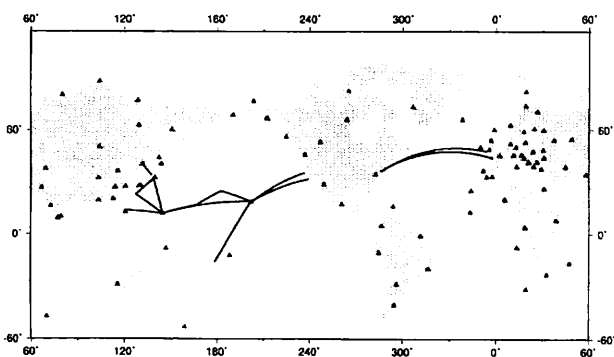
を満たす解 \mathbf{w}_H もまた (2) 式を満たす。ある磁場 B_r に対して $\partial_t B_r$ を全く生じない流れ \mathbf{v}_H が存在するため、

理論的にはSVだけを用いた推定には不確実性が伴うことになる。実際の解の推定には、力学的な背景にもとづいた先験的仮定 (tangentially geostrophic flow や toroidal flow Bloxham and Jackson 1991) によって解の空間を狭めた上で、流れの時間的・空間的な滑らかさ等を制約として一つの最尤解を得る。

第2の問題は、地磁気の観測誤差による解の不確実性である。地上の観測点におけるSVの観測誤差は $\Delta \dot{B}_{obs} \sim 4 \text{ nT yr}^{-1}$ と見積もられており、推定される解の誤差は流れの強さそのものと同程度になる。また、地磁気の観測誤差に加えて、SV観測に必要な地表での固定観測点が十分に稠密でないことも不確実性の原因となっている。特に太平洋域は観測点の空白域になっているため (Barker and Barraclough 1985)、同領域直下では外核表面流が精度よく決まらない (もともとSVが小さい領域でもある)。これを改善するためには海半球ネットワーク計画による太平洋上の観測点を含めた解析を行えばよいが、外核表面流を推定するためには今後およそ10年以上の連続観測が必要となる。

この問題を克服するには、データをより多く用いる必要がある。Holme (1998a) は数十年スケールの LOD (length of the day) 変動がコア-マントル間の電磁結合に起因するという仮定のもとで、SVに加えてLOD変動をデータとして外核表面流を推定した。LOD変動とSVを同時に説明する解を得たが、LOD変動は解に十分な制約を与えるほど多くのデータにはならない。

本研究では、外核表面流の情報を持ちうる新たな観測値として海底ケーブルによる電位差観測から得られた地球電場に注目する。電場を用いる動機としては、固定磁場観測点の不足している海洋域を海底ケーブルがカバーするという地理的な利点に加えて (第1図)、次節で述べるように、観測されるポロイダル磁場だけでは見えない電磁場の情報を電場が持つという理論的な利点もある。



第1図：主な地磁気観測点 (▲) と海底ケーブル (実線)

現在太平洋に展開されている海底ケーブルでは $E_{obs} \sim 0.1 \text{ mV km}^{-1}$ という大きさの電場変動が観測されている。その原因としては様々なものが考えられるが、 τ_{SV} の時間スケールでは核か海洋によるダイナモの効果が起源として有力である (Shimizu and Utada 2004)。ここでは、観測された電場変動は主に核を起源としていると仮定する。核を起源とするマントル内の電場は、次の3つの成分に分けられる。

E_T : ポロイダル磁場が時間変化することによって生じるトロイダル電場

E_L : 核からマントルに漏れる電流に伴うポロイダル電場

E_A : CMBにおけるマントルと外核流体の相対的な運動 (すなわち外核表面流) に伴うポロイダル電場

このうち本研究のテーマとなるのは E_A である。 E_T はSVから直接求めることが可能であり、地表付近でその大きさが E_{obs} に及ばないことは容易に計算される。 E_L は観測から制約を与えることができないが、外核内部に適当な大きさのシア流を与えることで E_{obs} に相当する電場が地表で生じる可能性が示されている (Shimizu and Utada 2004)。一方、 E_A が地表でどの程度の大きさになるのか、どの程度の変動を起こしえるかは今のところはっきりわかっていない。

本稿では、まず外核表面流によってCMBに誘導される電場とマントル内における電場の定式化を行う。次に、観測された地球電場が外核表面流の情報を持ちうるかを調べるため、SVを生成しない外核表面流 v_H によってどの程度の大きさの電場を地表に生じうるか計算した結果を述べる。電場は単純に v_H の大きさに比例して依存するので、SVから推定された外核表面流モデルの典型的な大きさ ($\sim 20 \text{ km yr}^{-1}$) を v_H の基準とする。実際の計算では、磁場のトロイダルスカラー関数を球面調和関数展開した上で、モードごとに地表での電場の大きさを求めている。

CMBにおける電磁場シグナルが地表にどのように伝播するかはマントルの電気伝導度構造 $\sigma_M(r, \theta, \varphi)$ に依存する。特に水平方向に不均一な σ_M によって電磁場はトロイダル-ポロイダル間のモード変換を起こす。しかし、今のところ σ_M の3次元構造に関して十分な知識があるとは言えない。それでも半径方向の1次元構造が卓越していると考えられるので、ここでの計算には半径のみに依存する電気伝導度 $\sigma_M(r)$ を第1近似として用いることにする。後で述べるが、半径のべき乗の構造 $\sigma_M(r) = \sigma_{CMB}(c/r)^\alpha$ を採用すると、 $\sigma_M(r)$ の減衰の具合 α の違いで地表での電場の大きさに最大で1桁近くの違いが生じ得るということがわか

る。マンツルの電気伝導度モデル (Utada et al. 2003) と矛盾しない範囲の σ_{CMB} , α を用いて SV を生成しない外核表面流 \mathbf{v}_H に伴う電場を計算した結果、1,2 次のモードでは地表で E_{obs} に対応する大きさにもなりえるが、それ以上の高次の成分では E_{obs} よりも十分小さくなるということが示された。

外核表面流に伴う電場

外核の内部における電場 \mathbf{E} は、流体の流れ場 \mathbf{u} と磁場 \mathbf{B} を用いて

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta_C \nabla \times \mathbf{B} \quad (4)$$

と表される。 $\eta_C (\equiv (\mu\sigma_C)^{-1} \sim 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})$ は核における磁気拡散率である。(4) 式の右辺は第 1 項が流れによって誘導される電場、第 2 項が電流を伴った電場を表す。その大きさの比は磁気レイノルズ数 R_m で表され、外核の内部領域では第 1 項の方が卓越していると推測される。

次に CMB 付近での電場の水平成分について考える。この場合は $\partial \mathbf{B}_H / \partial r$ の大きさ次第で (4) 式の右辺第 2 項が第 1 項に比べて無視できるとは限らない。 $\partial \mathbf{B}_H / \partial r$ は磁場の観測から評価することができないので第 2 項の寄与はわからないが、第 1 項については外核表面流 \mathbf{u}_H と半径方向の B_r から求めることができる。(4) 式において右辺第 1 項の電場の成分のみを考慮すると、CMB 直下では $u_r = 0$ であるので

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\mathbf{u}_H B_r \quad (5)$$

となる。電場の水平成分は $\mathbf{E}_H|_{r=c-0} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{u}_H B_r$ と書ける。

後の計算のため、(5) 式を球面調和関数を用いてパラメータ化する。CMB 直下のエクマン境界層を挟んで B_r は連続であるので downward continuation により

$$B_r|_{r=c-0} = \sum_{m,j} (m+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{m+2} b_m^j Y_m^j \quad (6)$$

と書ける。ここで a は地球の平均半径 (6371 km)、 b_m^j は m 階 j 次のガウス係数 ($\{b_m^{jc}, b_m^{js}\} = \{g_m^j, h_m^j\}$) を表す。 $Y_m^j(\theta, \varphi)$ は球面調和関数 ($\{Y_m^{jc}, Y_m^{js}\} = \{P_m^j \cos m\varphi, P_m^j \sin m\varphi\}$), $P_m^j(\theta)$ はルジャンドル陪関数) であり、これは

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_m^j Y_n^k \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\delta_{mn} \delta_{jk}}{2m+1} \quad (7)$$

$$\nabla_H^2 Y_m^j = -\frac{m(m+1)}{r^2} Y_m^j \quad (8)$$

という性質を持つ。また $\sum_{m,j} \equiv \sum_m \sum_j \sum_{(c,s)}$ とする。

水平成分のみのベクトル \mathbf{u}_H と $\mathbf{E}_H|_{r=c-0}$ については、トロイダル・ポロイダル成分に分解

$$\mathbf{u}_H|_{r=c-0} = \nabla \times T\mathbf{r} + r\nabla_H S \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_H|_{r=c-0} = \nabla \times \Psi\mathbf{r} + r\nabla_H \Phi \quad (10)$$

して、球面上 ($r = c$) の各スカラー関数を球面調和関数展開する。

$$T = \sum_{n,k} t_n^k Y_n^k, \quad S = \sum_{n,k} s_n^k Y_n^k \quad (11)$$

$$\Psi = \sum_{l,i} \psi_l^i Y_l^i, \quad \Phi = \sum_{l,i} \phi_l^i Y_l^i \quad (12)$$

(6) 式と (11) 式 - (12) 式を (5) 式に代入して、(7) 式、(8) 式を利用することで、パラメータ同士の関係式

$$\begin{aligned} \psi_l^i = & -\frac{1}{4\pi} \frac{2l+1}{l(l+1)} \sum_{m,j} (m+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{m+2} b_m^j \\ & \times \sum_{n,k} \left\{ \frac{s_n^k}{2} (l(l+1) - m(m+1) \right. \\ & \left. + n(n+1)) G_{lmn}^{ijk} + t_n^k E_{lmn}^{ijk} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_l^i = & -\frac{1}{4\pi} \frac{2l+1}{l(l+1)} \sum_{m,j} (m+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{m+2} b_m^j \\ & \times \sum_{n,k} \left\{ -\frac{t_n^k}{2} (l(l+1) - m(m+1) \right. \\ & \left. + n(n+1)) G_{lmn}^{ijk} + s_n^k E_{lmn}^{ijk} \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

を得る。ここで G_{lmn}^{ijk} と E_{lmn}^{ijk} は

$$G_{lmn}^{ijk} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^i Y_m^j Y_n^k \sin \theta d\theta d\varphi \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E_{lmn}^{ijk} \equiv & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^i \left(\frac{\partial Y_m^j}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_n^k}{\partial \theta} \right. \\ & \left. - \frac{\partial Y_m^j}{\partial \theta} \frac{\partial Y_n^k}{\partial \varphi} \right) d\theta d\varphi \quad (16) \end{aligned}$$

と定義される (Gaunt 積分・Elsassar 積分)。パラメータ $t_n^k, s_n^k, \psi_m^j, \phi_m^j$ をある次数で打ち切って、それぞれベクトル $\mathbf{t}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}$ によって表記すると、(13) 式と (14) 式はまとめて

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_t & \Psi_s \\ \Phi_t & \Phi_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (17)$$

と書くことができる。

ところで (5) 式と (10) 式より

$$\begin{aligned} u_H B_r &= -\hat{r} \times \mathbf{E}_H \\ &= -r \nabla_H \Psi - \mathbf{r} \times \nabla \Phi \end{aligned} \quad (18)$$

であるので、これを (2) 式に代入すると

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} - r \nabla_H^2 \Psi = 0 \quad (19)$$

となる。つまり SV と関連しているのは $E_H|_{r=c-0}$ のトロイダル成分を生成する外核表面流だけである。また、(18) 式を (3) 式と比較してもわかる通り、 $E_H|_{r=c-0}$ のポロイダル成分を生成する外核表面流は SV により制約を与えられない流れの成分 v_H であることがわかる。このことが、外核表面流の更なる情報を得ようとするのにあたって地球電場を新たなデータとして用いる理論的な動機となっている。

マンツルの 1 次元電気伝導度モデル

マンツルの 1 次元電気伝導度構造は、これまで高圧実験 (Katsura et al. 1998) や電磁探査 (Utada et al. 2003) によって上部マンツル (深さ 1000km 程度まで) について調べられており、地表付近で $\sim 10^2 - 10^3 \text{ S m}^{-1}$ 、深さ 1000km 付近で $\sim 1 \text{ S m}^{-1}$ と推定されている。下部マンツルの電気伝導度に関しては以上の方法による推定がほとんどなされていないが、geomagnetic jerk を使った上限の推定 (Alexandrescu et al. 1999) は行われている。それによると下部マンツル 2000km は平均で 10 S m^{-1} を超えない。

ここでは、電場計算のためのマンツルの電気伝導度構造として

$$\sigma_M(r) = \sigma_{CMB} \left(\frac{c}{r}\right)^\alpha, \quad c \leq r \leq a \quad (20)$$

となる「べき乗モデル」を採用する。また、 σ_{CMB} と α には第 1 表にあるように 2 種類の値を与え、それぞれをモデル A、モデル B とする (第 2 図)。モデル A のコンダクタンスは、コア-マンツル電磁結合によって LOD 変動を説明するのに必要な大きさ 10^8 S (Holme 1998b) と同程度である。

これらの $\sigma_M(r)$ を仮定した上で、マンツル内部の電場分布を求める。マンツル内部の磁場 \mathbf{B} をトロイダル・ポロイダル分解

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathcal{T} \mathbf{r} + \nabla \times \nabla \times \mathcal{S} \mathbf{r} \quad (21)$$

によって表すと、ファラデーの法則 $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ より電場は

$$\mathbf{E} = -\nabla f - \dot{\mathcal{T}} \mathbf{r} - \nabla \times \dot{\mathcal{S}} \mathbf{r} \quad (22)$$

と書かれる。ここで f は任意のスカラー関数 (静電ポテンシャル) である。1 次元マンツル内の電磁場を支配するインダクション方程式

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times (\eta_M \nabla \times \mathbf{B}) \quad (23)$$

により ($\dot{}$ は時間微分)、スカラー関数 $f, \mathcal{T}, \mathcal{S}$ は

$$f = -\eta_M \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{T} r) \quad (24)$$

$$\dot{\mathcal{T}} = \eta_M \nabla^2 \mathcal{T} + \frac{\eta'_M}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{T} r) \quad (25)$$

$$\dot{\mathcal{S}} = \eta_M \nabla^2 \mathcal{S} \quad (26)$$

という方程式を満たす ($\eta_M = \eta_{CMB} (r/c)^\alpha$, $\eta'_M \equiv \partial_r \eta_M$)。

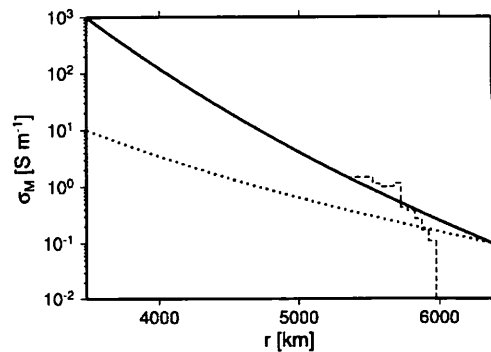
ここで時間スケールの比 $\epsilon (= \tau_{diff} / \tau_{SV})$ によって $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1$ と分解すると、(25) 式、(26) 式は基本場の方程式

$$0 = \eta_M \nabla^2 \mathcal{T}_0 + \frac{\eta'_M}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{T}_0 r) \quad (27)$$

$$0 = \eta_M \nabla^2 \mathcal{S}_0 \quad (28)$$

第 1 表：マンツルの電気伝導度モデル A と B

	α	σ_{CMB} [S m ⁻¹]	$\sigma_M(a)$ [S m ⁻¹]	$\int_c^a \sigma_M dr$ [S]
モデル A	15.3	1000	0.1	2.44×10^8
モデル B	7.63	10	0.1	5.16×10^6



第 2 図：仮定した電気伝導度のべき乗モデル A (実線) とモデル B (点線)。破線は Utada et al. (2003) によるモデル (b)。

と過渡的な誘導場の方程式

$$\dot{T}_0 = \eta_M \nabla^2 T_1 + \frac{\eta'_M}{r} \frac{\partial}{\partial r} (T_1 r) \quad (29)$$

$$\dot{S}_0 = \eta_M \nabla^2 S_1 \quad (30)$$

に分けられる。注目している時間スケール τ_{SV} では、後者の場合は前者と比べて無視できるほど小さい ($O(\epsilon)$)。従って、ここではマントル内の電磁場は ϵ の 1 次近似で (27) 式と (28) 式の解によって与えられる。

(28) 式はポロイダル磁場がポテンシャル場 B_0 になることを示すものであり (地磁気ポテンシャル $V = -\partial(S_0 r)/\partial r$)、downward continuation ((6) 式) と一貫している。 S_0 を求めるのには地上の磁場観測が条件となる。(27) 式の T_0 に関しては、地表 ($r = a$) における境界条件 ($T_0 = 0$) が課せられる。また、 T_0 と S_0 の両方に対し CMB ($r = c$) においても一つの境界条件が与えられる。CMB 直下のエクマン境界層を挟んで電場の水平成分が連続であるという条件である (Roberts 1972)。CMB におけるマントル側の水平電場は

$$\mathbf{E}_H|_{r=c+0} = \nabla_H \left\{ \eta_M \frac{\partial}{\partial r} (T_0 r) \right\} - \nabla_H \times \dot{S}_0 \mathbf{r} \quad (31)$$

であるので、(10) 式と比較して

$$\frac{\eta_{CMB}}{c} \frac{\partial}{\partial r} (T_0 r) = \Phi \quad (32)$$

$$-\dot{S}_0 = \Psi \quad (33)$$

となる。(33) 式は (2) 式と等価であり、これによりマントル内にトロイダル電場・ポロイダル磁場を作る外核表面流が SV により推定される。一方、(32) 式は外核表面流に関連する成分の T_0 (ポロイダル電場・トロイダル磁場) を求めるための境界条件となる。

スカラー関数 T_0 を球面調和関数により展開 ($T_0 = \sum_{n,k} \tau_n^k(r) Y_n^k(\theta, \varphi)$) すると、(27) 式より全ての τ_n^k に対して

$$\frac{\partial^2 \tau_n^k}{\partial r^2} + \frac{2 + \alpha}{r} \frac{\partial \tau_n^k}{\partial r} - \frac{n(n+1) - \alpha}{r^2} \tau_n^k = 0 \quad (34)$$

を得る。ここで任意定数を C_1, C_2 とすると、(34) 式の解は

$$\tau_n^k = C_1 \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}(-1-\alpha-\zeta_{n,\alpha})} + C_2 \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}(-1-\alpha+\zeta_{n,\alpha})} \quad (35)$$

$$\zeta_{n,\alpha} \equiv \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4n(n+1)}$$

である (Roberts and Lowes 1961)。 $T_0|_{r=a} = 0$ と (32) 式の境界条件を満たすようなポロイダル電場の水平成分は、(22) 式と (24) 式より

$$\mathbf{E}_H(r) = r \sum_{n,k} \gamma_{n,\alpha}(r) \phi_n^k \nabla_H Y_n^k \quad (36)$$

$$\gamma_{n,\alpha}(r) \equiv \left\{ \begin{aligned} & (1 - \alpha + \zeta_{n,\alpha}) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}(-3+\alpha+\zeta_{n,\alpha})} \\ & - (1 - \alpha - \zeta_{n,\alpha}) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}(-3+\alpha-\zeta_{n,\alpha})} \end{aligned} \right\} \\ \times \left\{ \begin{aligned} & (1 - \alpha + \zeta_{n,\alpha}) \left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{2}(-3+\alpha+\zeta_{n,\alpha})} \\ & - (1 - \alpha - \zeta_{n,\alpha}) \left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{2}(-3+\alpha-\zeta_{n,\alpha})} \end{aligned} \right\}^{-1}$$

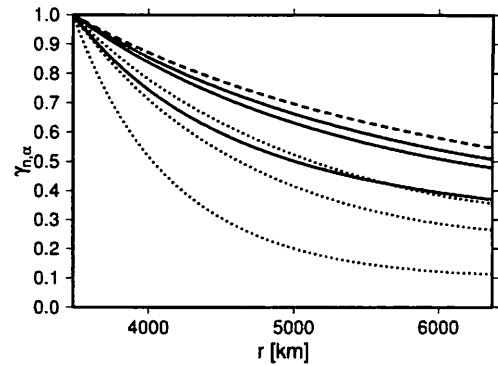
となるので、 $\mathbf{E}_H(r)$ は外核表面流のパラメータ t, s の線形結合によって計算される。

$\mathbf{E}_H(r)$ は σ_{CMB} の値に依存しないが、 α には依存する。マントル内部では半径に伴って電気伝導度 $\sigma_M(r)$ が速く減少する (α が大きい) ほど \mathbf{E}_H の減少が遅い。モデル A、B に対する $\gamma_{n,\alpha}(r)$ と $\alpha = 0$ と $\alpha \rightarrow \infty$ の場合の $\gamma_{n,\alpha}(r)$:

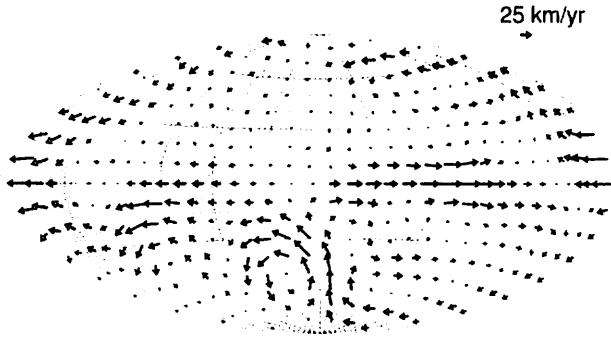
$$\gamma_{n,0}(r) = \frac{n(r/a)^{-n-2} + (n+1)(r/a)^{n-1}}{n(c/a)^{-n-2} + (n+1)(c/a)^{n-1}} \quad (37)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma_{n,\alpha}(r) = \frac{c}{r} \quad (38)$$

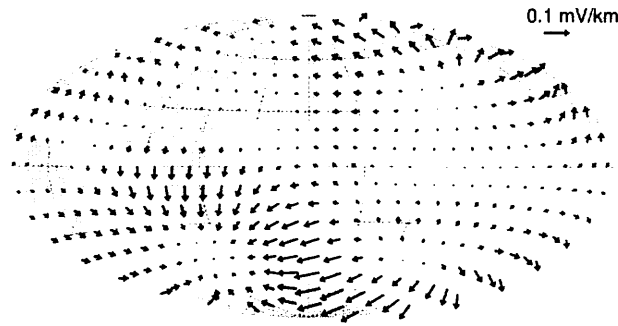
を第 3 図に示す ($n = 1$ のとき)。モデル A とモデル B の間では、地表での \mathbf{E}_H の値に桁の違いが生じないが、 α の値が大きく変わる場合は 1 桁近くの違いが生じ得ることがわかる。



第 3 図: マントル内部 ($c \leq r \leq a$) と CMB における水平電場の大きさの比 $\gamma_{n,\alpha}$ 。 $n = 1$ (実線)、 $n = 3$ (点線) のそれぞれについて上からモデル A、モデル B、 $\alpha = 0$ 。破線は $\alpha \rightarrow \infty$ 。



第 4 図： 1980 年の外核表面流モデル (tangentially geostrophic flow, 打ち切り次数 $N = 8$)



第 5 図： 第 4 図の外核表面流 \mathbf{u}_H から計算される地表の水平ポロイダル電場 $\mathbf{E}_H|_{r=a}$

外核表面流に伴って地表に生じる電場

ポテンシャル磁場 \mathbf{B}_0 が与えられれば、(14) 式と (36) 式に従って外核表面流 \mathbf{u}_H から地表でのポロイダル電場の水平成分 $\mathbf{E}_H|_{r=a}$ が線形的に計算される。実際に 1980 年の主磁場 DGRF1980 (\mathbf{B}_{80}) と SV ($\dot{\mathbf{B}}_{80}$) のモデルから推定された \mathbf{u}_H (第 4 図) から計算される $\mathbf{E}_H|_{r=a}$ を第 5 図に示す。 \mathbf{u}_H , \mathbf{B}_{80} の打ち切り次数はそれぞれ $N = 8$ と $M = 10$ なので、Gaunt 積分・Elsasser 積分の選択規則により \mathbf{E}_H は次数 $L = 18$ までエネルギーを持っている。このときの \mathbf{u}_H と $\mathbf{E}_H|_{r=a}$ の平均の大きさを

$$\begin{aligned} (\overline{u_H})^2 &= \frac{1}{4\pi c^2} \iint_{r=c} |\mathbf{u}_H|^2 dS \\ &= \sum_{n,k} \frac{n(n+1)}{2n+1} \{(t_n^k)^2 + (s_n^k)^2\} \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{E_H})^2 &= \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{r=a} |\mathbf{E}_H|^2 dS \\ &= \sum_{l,i} \frac{l(l+1)}{2l+1} (\gamma_{l,\alpha} \phi_i^l)^2 \quad (40) \end{aligned}$$

から計算すると、 $\overline{u_H} = 19.0 \text{ km yr}^{-1}$, $\overline{E_H} = 4.31 \times 10^{-2} \text{ mV km}^{-1}$ となる。これは観測された電場 E_{obs} ($\sim 0.1 \text{ mV km}^{-1}$) に満たない。

(19) 式が示す通り、SV は CMB で (1 次元マントルの場合は地表においても) ポロイダル電場を生じさせる流れの成分 v_H の情報を持っていない。従って第 5 図の電場は \mathbf{u}_H 推定の際に課された空間的な滑らかさと tangential geostrophy の仮定によって作り出された v_H によるものである。

SV を生成しない v_H が \mathbf{u}_H に重ねられても SV は依然として説明される。そこで電場データによって v_H を調べられるか確かめるため、地表で E_{obs} の大きさのポロイダル電場を生じさせるのに必要な v_H を逆に推定する。

ある特定の電場のモード $\bar{\phi}_i^l$ に任意の大きさの値をあらかじめ与えて、モードごとにそれを説明するのに必要となる $\bar{v}_H(l,i)$ をインバージョンにより求める。観測方程式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi \\ \bar{\phi}_i^l \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} t_{(l,i)} \\ s_{(l,i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_\psi \\ e_{\phi(l,i)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &\equiv \begin{bmatrix} \Psi_t & \Psi_s \\ \{\Phi_t\}_i^l & \{\Phi_s\}_i^l \end{bmatrix} \quad (41) \end{aligned}$$

である ($\{\Phi_t\}_i^l, \{\Phi_s\}_i^l$ はそれぞれ (17) 式において ϕ_i^l に対応する Φ_t, Φ_s の行ベクトル)。

$\bar{\phi}_i^l$ の値は、任意の無次元パラメータを λ_ϕ として

$$\bar{\phi}_i^l = \lambda_\phi \sqrt{\frac{2l+1}{l(l+1)}} \frac{E_{obs}}{\gamma_{l,\alpha}} \quad (42)$$

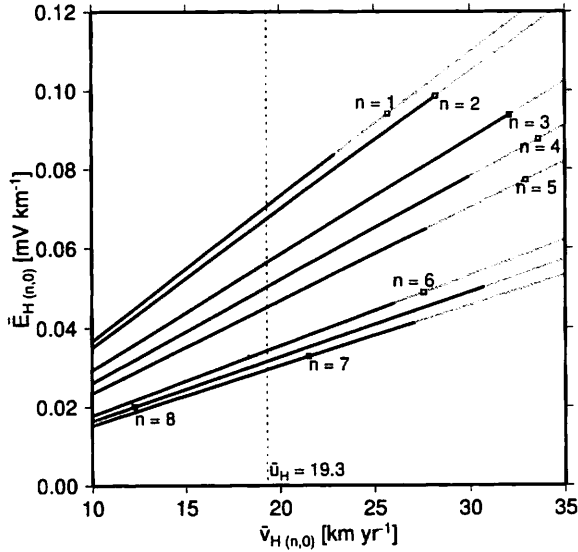
によって与える (単位は mV km^{-1})。そのモデル誤差 e_ϕ は $N(\bar{\phi}_i^l, \sigma_\phi^2)$, $\sigma_\phi = 0.1 \bar{\phi}_i^l$ という統計的ふるまいに従うとする。

ψ は外核表面流によって説明される SV ($\dot{\mathbf{B}}_p = -\nabla \dot{V}$, $\dot{V} \equiv a \sum_{l,i} (a/r)^{l+1} (b_i^l)_p Y_i^l$) と

$$(b_i^l)_p = -\frac{l}{a} \left(\frac{c}{a}\right)^{l+1} \psi_i^l \quad (43)$$

という関係にある ((19) 式と (8) 式より)。そこで推定された流れ $\bar{v}_H(l,i)$ が SV を生じないように、インバージョンでは $\psi = \mathbf{0}$ (次数 $L_{SV} \leq 18$) とする。また、 $\dot{\mathbf{B}}_p$ の地表におけるエネルギー

$$\begin{aligned} (\overline{\dot{\mathbf{B}}_p})^2 &= \frac{1}{4\pi a} \iint_{r=a} \dot{\mathbf{B}}_p^2 dS \\ &= \sum_{l,i}^{L_{SV}} (l+1) \{(b_i^l)_p\}^2 \\ &= \mathbf{e}_\psi^T \mathbf{C}_\psi^{-1} \mathbf{e}_\psi \quad (44) \end{aligned}$$



第6図: $v(\bar{l}, 0)_H$ によって地表に生成される $\overline{E}_{H(l,0)}$. □は $\lambda_\phi = 1.0$ ((42) 式) の場合に対応する。グレーの部分では $\overline{B}_p > \Delta \dot{B}_{obs} \sim 4 \text{ nT yr}^{-1}$ となる。

$$C_\psi^{-1} \equiv \frac{l^2(l+1)}{a^2} \left(\frac{c}{a}\right)^{2(l+1)} \mathbf{1}$$

が最小になるようにする ($\mathbf{1}$ は単位行列)。

推定される $\tilde{v}_{H(l,i)}$ (次数 $N \leq 8$) は

$$\begin{bmatrix} \tilde{t}(l,i) \\ \tilde{s}(l,i) \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} + \lambda_E \mathbf{D}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} \psi \\ \phi_l^i \end{bmatrix} \quad (45)$$

によって与えられる。ここで \mathbf{C}^{-1} は

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_\psi C_\psi^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_\phi^{-2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

という対角行列であり、 \mathbf{D}^{-1} は $\tilde{v}_{H(l,i)}$ のエネルギー ((39) 式) を最小にするための行列 ($\mathbf{D}^{-1} = \frac{n(n+1)}{2n+1} \mathbf{1}$) である。また λ_ψ , λ_E はスケーリングパラメータである (単位はそれぞれ $(\text{km}^2/\text{mV})^2$, $(\text{yr}/\text{km})^2$)。

第6図に (45) 式の解となる外核表面流 $\tilde{v}_{H(l,i)}$ によって生成される水平ポロイダル電場の平均の大きさ $\overline{E}_{H(l,i)}$ を示す ($i=0$ の場合のみ)。ここでは $\{\lambda_\psi, \lambda_E\} = \{1.0 \times 10^{14}, 2.0 \times 10^{-2}\}$ である。これらのパラメータの値を変えても、同じ程度のエネルギーを持つ外核表面流から生成される電場は、ほぼこれ以上大きくなることはない。次数が低いほど地表における $\overline{E}_{H(l,i)}$ は大きい。SV から推定される \overline{v}_H と同程度の大きさの $\tilde{v}_{H(l,i)}$ によって生成される電場は $\sim 0.02 - 0.07 \text{ mV km}^{-1}$ であり E_{obs} には及ばない。

考察とまとめ

外核表面流によって地表に生じる電場の大きさは CMB 直下の流れ v_H と半径成分の磁場 B_r (つまりポテンシャル磁場 B_0) の大きさ、およびマンツルの電気伝導度構造 σ_M に依存する。第6図で示されている通り $\overline{E}_{H(l,i)}$ は $\overline{v}_{H(l,i)}$ に比例していて、その比例定数は B_0 と σ_M によって決まる。次数ごとの傾きの違いは、電磁シグナルが CMB から地表に伝わる際のスクリーニング効果の影響による ($\gamma_{n,\alpha}$ の n 依存性)。ポロイダル磁場は地球磁場の観測から、また外核表面流は地球磁場および地球回転の観測から制約が与えられるので、それらの大きさはほぼ決まっている。一方、マンツルの電気伝導度構造は不確定性が大きく、モデルによって地表における電場 $E|_{r=a}$ の大きさの計算結果が変えられる (Roberts and Lowes 1961)。ただし、(20) 式の「べき乗モデル」で α の値をいくらか大きくしたとしても、これまでに推定されているマンツルの電気伝導度モデルとコンダクタンスを考慮すると、 $E|_{r=a}$ をモデル A の場合より桁で大きくすることは難しい。前節の結果が外核表面流により生成される電場の大きさのほぼ上限であると考えられる。

$E|_{r=a}$ の低次の成分 (特に2次以下) は比較的大きくなりえる。 $\overline{v}_H \sim 20 \text{ km yr}^{-1}$ の流れに対して、地域によっては $E_{H(l,i)}$ ($l=1, 2$) は E_{obs} と同程度の大きさになる。SV から推定される u_H に伴う電場 (第5図) は太平洋域で E_{obs} におよばないが、それでもSV では見えない流れ v_H に伴うごく低次の電場が長基線の海底ケーブルによって検出されるという可能性はある。逆に電場データと (14) 式を用いて新たな外核表面流の情報を得ようとするなら、(仮に電位分布が地表で完全にわかっていると) 制約を与えられるのはせいぜい1次か2次の流れに対してだけといえる。

ポロイダル電場が外核表面流に由来するのか (E_A)、または外核からマンツルに漏れる電流に由来するのか (E_L)、観測から区別することができないということには留意する必要がある。特に、外核内で torsional oscillation が生じているとすると回転軸方向の電流が伴うことになるので、マンツル内で meridional 成分の E_L が卓越すると考えられる。ただSV の観測から推定される torsional oscillation の周期は60年前後であり (Zatman and Bloxham 1997)、 E_{obs} や LOD の変動よりも時間スケールが長い。 E_L も同じ時間スケールで変化すると仮定すると、 E_L は E_A より小さいか同程度である。しかし E_L の変動の時間スケールが τ_{SV} であるな

らば、 E_L が支配的となって E_{obs} や LOD の変動を説明する可能性がある (マントルがモデル A の程度のコンダクタンス ($\sim 10^8$ S) を持つ場合、LOD 変動に対応する大きさの電磁トルクが生じる (Holme 1998b))。

ここでは SV から見えない外核表面流 v_H とそれに伴うポロイダル電場の大きさの関係に注目したが、更に v_H の空間分布を考慮に入れることで、よりもっともらしい v_H を知るができるかもしれない。例えば、 τ_{SV} の時間スケールでコア-マントル系の角運動量の保存を仮定すると LOD 変動がよく説明される (Jackson et al. 1993) という点で tangential geostrophy を満たす u_H はもっともらしい。SV から推定された u_H のうち軸対称トロイダル流 (テラー-プラウドマンの定理に従う地衡流 u_G) を除いた成分 u'_H が温度風として駆動されているという仮定と、地震波から推定されるマントル底部の水平温度分布は一貫する (Bloxham and Gubbins 1987)。流体の粘性を考慮すると u'_H の渦は流体の上昇や沈降に対応するが、これらの分布が CMB における半径方向の磁束の集中や分散によく一致している (Hulot et al. 2002)。 v_H もまた以上に他の観測事実と物理的整合性のある流れであることが期待される。

参考文献

- Alexandrescu, M. M., Gibert, D., Le Mouél, J.-L., Hulot, G., Saracco, G., 1999. An estimate of average lower mantle conductivity by wavelet analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.* 104, 17735-17745.
- Backus, G. E., 1968. Kinematics of geomagnetic secular variation in a perfectly conducting core. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 263, 239-266.
- Barker, F. S., Barraclough, D. R., 1985. The effect of the non-uniform distribution of magnetic observational data on secular variation models. *Phys. Earth Planet. Inter.* 37, 65-73.
- Bloxham, J., Gubbins, D., 1985. The secular variation of Earth's magnetic field. *Nature* 317, 777-781.
- Bloxham, J., Gubbins, D., 1987. Thermal core-mantle interaction. *Nature* 325, 511-513.
- Bloxham, J., Jackson, A., 1991. Fluid flow near the surface of Earth's outer core. *Rev. Geophys.* 29, 97-120.
- Holme, R., 1998a. Electromagnetic core-mantle coupling: I. Explaining decadal changes in the length of day. *Geophys. J. Int.* 132, 167-180.
- Holme, R., 1998b. Electromagnetic core-mantle coupling: II. Probing deep mantle conductance. In: Gurnis, M., Wysession, M. E., Knittle, E., Buffett, B. A. (Eds.), *The Core-Mantle Boundary Region*. Vol. 28 of *Geodynamics Series*. AGU, pp. 139-151.
- Hulot, G., Eymin, C., Langlais, B., Manda, M., Olsen, N., 2002. Small-scale structure of the geodynamo inferred from oersted and magsat satellite data. *Nature* 416, 620-623.
- Jackson, A., Bloxham, J., Gubbins, D., 1993. Time-dependent flow at the core surface and conservation of angular momentum in the coupled core-mantle system. In: Le Mouél, J.-L., Smylie, D. E., Herring, T. (Eds.), *Dynamics of Earth's Deep Interior and Earth Rotation*. Vol. 72. AGU Geophysical Monograph, pp. 97-107.
- Katsura, T., Sato, K., Ito, E., 1998. Electrical conductivity of silicate perovskite at lower-mantle conditions. *Nature* 395, 493-495.
- Kuang, W., Bloxham, J., 1997. An Earth-like numerical dynamo model. *Nature* 389, 371-374.
- Roberts, P. H., 1972. Electromagnetic core-mantle coupling. *J. Geomag. Geoelectr.* 24, 231-259.
- Roberts, P. H., Lowes, F. J., 1961. Earth currents of deep internal origin. *J. Geophys. Res.* 66, 1243-1254.
- Shimizu, H., Utada, H., 2004. The feasibility of using decadal changes in the geoelectric field to probe Earth's core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, in press.
- Utada, H., Koyama, T., Shimizu, H., Chave, A. D., 2003. A semi-global reference model for electrical conductivity in the mid-mantle beneath the north pacific region. *Geophys. Res. Lett.* 30 (4), 1194, 10.1029/2002GL016092.
- Zatman, S., Bloxham, J., 1997. Torsional oscillations and the magnetic field within the Earth's core. *Nature* 388, 760-763.