

アーチーの式と並列回路モデル

高倉伸一（産業技術総合研究所）

Archie's formulas and equivalent parallel circuit model for rock resistivity

Shinichi Takakura (Geological Survey of Japan / AIST)

1. はじめに

電気・電磁探査の目的は地下構造を解明することである。しかし、電気・電磁探査データより解析された比抵抗構造から地下構造を解釈するとなると不十分なところが多いのが現状である。比抵抗構造から正確な地下構造を解釈することができなければ、電気・電磁探査によってどんなに高精度の比抵抗構造を求めても、現実には役に立たない。電気・電磁探査法を有効活用するためには、比抵抗構造から地下構造を正しく解釈する技術を確立する必要がある。

比抵抗構造の解釈が不十分であるのは、地下構造を形成する岩石の比抵抗物性に関する知識が不足しているからである。つまり、比抵抗分布と岩石の分布とを対応づける基本的な知識が欠如しているため、比抵抗構造の解釈ができないといえる。

この知識を獲得する一つの方法は、岩石の比抵抗を直接測定することである。岩石試料の比抵抗測定は多くの研究者が行っており、アーチーの式(Archie, 1942)を始めとして多くの実験式が提唱されている。実験式はある特定の岩石や測定条件に基づいて得られたものであるため、それが適用できる範囲には限界はある。しかし、そのことを考えずに利用したため、比抵抗構造の解釈が的確でない例も多いのが現状である。多種多様にわたる全ての岩石を対象とした試料測定を行うことは非現実的であり、岩石の比抵抗物性に関する統一的な知識を導出することは不可能であるが、少なくともこれまでの実験式を整理し、それらの式の成り立つ条件と適用限界を明らかにすることは必要である。

そこで、本報では、アーチーの式など岩石の比抵抗に関するこれまでの実験式を整理し、比抵抗を支配する要因について検討した。

2. アーチーの式

一般化したアーチーの式は、間隙率を ϕ 、水飽和度を S 、間隙水の比抵抗を ρ_w とすれば、岩石の比抵抗 ρ_R は、

$$\rho_R = a \cdot \phi^{-m} \cdot S^{-n} \cdot \rho_w \quad (1)$$

と表される。ここで、 a 、 m 、 n は岩石の性質に依存する定数であり、 a は迂回係数、 m は膠結係数、 n は飽和係数と呼ばれる。砂岩では $a=0.5\sim 2.5$ 、 $m=1.3\sim 2.5$ 、 $n=2$ となる。アーチーの式では、岩石の比抵抗は間隙水の比抵抗に比例し、間隙率の m 乗と水飽和率の n 乗に反比例するとされている。

水飽和度が100%($S=1$)のとき、地層比抵抗係数(formation factor) F と呼ばれる係数が次式で定義される。

$$F = \frac{\rho_R}{\rho_w} = a \cdot \phi^{-m} \quad (2)$$

地層比抵抗係数は迂回係数と間隙率の関数であり、岩石の間隙の大きさや形状およびその分布状態を反映する岩石固有の値と考えられていることから、岩石の種類や地下流体の貯留能力の判定に用いられる。

3. 並列回路モデル

アーチーの式は間隙率が10~40%と比較的大きい砂岩を対象に、20~100g/lのNaCl溶液を間隙水として求められた実験式である。したがって、その式は全ての岩石や測定条件に対して成り立つわけではなく、その適用には限界がある(たとえば、Worthington (1993))。一般に粘土鉱物を含有する含水岩石の比抵抗は、アーチーの式から推定される値より低くなる。これは水和した粘土鉱物ではイオン濃度の高い電気二重層が厚く発達し、それを媒体とするイオン伝導が卓越するからである。電気二重層が形成される鉱物粒子の表面が電気伝導の関わっていることから、この現象は表面伝導とも呼ばれる。粘土鉱物のように比表面積の大きな鉱物粒子ほど表面伝導の影響は大きい。Patnode and Wylite (1950)は粘土含有量の異なる砂岩に対して濃度の異なるNaCl溶液を含水させて比抵抗を測定し、アーチーの式から求められる地層比抵抗係数が間隙水の比抵抗によって変化することを明らかにした。そして、粘土鉱物のもつ導電性の影響を考慮した次のような式が提案した。

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{F\rho_w} + \frac{1}{\rho_c} \quad (3)$$

ここで、右辺第2項にある ρ_c は粘土鉱物による比抵抗を表す。(3)式では、含水岩石の比抵抗はアーチーの式の項すなわち間隙水を媒介とする比抵抗と粘土鉱物による比抵抗の並列回路として表されている。そのため、(3)式の形で表される式は並列回路モデルと呼ばれる。この式からわかるように、間隙水の比抵抗が高くなるほど右辺の第1項が小さくなり、粘土鉱物による比抵抗の影響が相対的に大きくなる。したがって、粘土鉱物を含有する岩石の地層比抵抗係数を正確に求めるためには、比抵抗の低い水で岩石を飽和させる必要がある。なお、並列回路モデルは比抵抗の逆数である導電率で考えた方がわかりやすいため、導電率を用いた式で表現されることが多い。岩石の導電率を $\sigma_R (= 1/\rho_R)$ 、間隙水の導電率を $\sigma_w (= 1/\rho_w)$ 、粘土鉱物の導電率を $\sigma_c (= 1/\rho_c)$ とすると、(3)式は、

$$\sigma_R = \frac{\sigma_w}{F} + \sigma_c \quad (4)$$

となる。

4. 粘土鉱物および電気二重層を考慮した実験式

粘土鉱物の比抵抗への影響は粘土鉱物の種類によって異なる。その影響の程度は粘土鉱物がもつ陽イオン交換容量(CEC)の大きさと深く関連する。物理検層の分野では、CECをパラメータとした実験式

が提案され、岩石に含有される粘土鉱物の影響を定量的に評価することが行われている。Waxman and Smits (1968)は数多くの岩石コアの比抵抗を測定し、次のような実験式を提案した。

$$\sigma_R = \frac{1}{F^*} (\sigma_w + BQ_v) \quad (5)$$

$$B = [1 - a \exp(-\sigma_w / \gamma)] \cdot 0.001 \lambda_{Na}^c \quad (6)$$

ここで、 F^* は σ_R と σ_w をグラフにプロットしたときの直線部分の傾きで定義される実験的な地層比抵抗係数である。 Q_v は孔隙容積 1000cm³あたりの交換性 Na イオンのグラム当量数であり、岩石の乾燥密度を ρ_d 、全孔隙率 (total porosity、孔隙水と粘土鉱物の境界領域を含めた孔隙率)を ϕ_t とすると、

$$Q_v = CEC \cdot \rho_d (1 - \phi_t) / \phi_t \quad (7)$$

となる。また、 B は対イオン (粘土鉱物表面の電荷に対して異符号の電荷をもつイオン) による当量伝導率 (equivalent conductivity) であり、 λ_{Na}^c はNa交換性イオンの最大イオン当量伝導率である。 a と γ は実測で求められる定数であり、 a は導電率が0の水におけるイオン移動度から、 γ は導電率が0からイオンの移動度が一定となる高導電率の溶液中におけるイオン移動度の増加率から決定される。

また、Clavier et al. (1977,1984)は、粘土鉱物の表面に形成される電気二重層を外部ヘルムホルツ面 (outer Helmholtz plane、水和陽イオンの最近接距離) の内側と外側に分けて考えた Dual Water model を提唱し、次のような理論式を示した。

$$\sigma_R = \frac{1}{F_0} [(1 - (f_\phi)_{CW}) \sigma_w + BQ_v] \quad (8)$$

ここで、 F_0 は σ_R と σ_w をグラフにプロットしたときの直線部分の傾きで定義される実験的な地層比抵抗係数であり、 $(f_\phi)_{CW}$ は間隙中にしめる外部ヘルムホルツ面の内側領域の割合である。また、 B は対イオン (交換性 Na イオン) による当量伝導率である。

さらに、Sen and Goode (1988, 1992)は、過去に実施された 140 のコアの実験データから、次の実験式を求めた。

$$\sigma_R = \frac{1}{F} \left(\sigma_w + \frac{D\mu_{DL}Q_v}{1 + CQ_v / \sigma_w} \right) + EQ_v \quad (9)$$

ここで、 F は地層比抵抗係数、 μ_{DL} は電気二重層内における陽イオンの有効移動度、 C 、 D 、 E は鉱物や孔隙の形状に依存する定数で一種の地層比抵抗係数である。

(5)式、(8)式、(9)式は、それらの地層比抵抗係数を全て F とみなすならば、岩石の導電率は第1項のアーチーの式(σ_w / F)で表される導電率に、第2項以下の導電率が加わった並列回路であることを示している。すなわち、いずれの式も(4)式と同じ形で表現できるとみなすことができる。(5)、(8)、(9)式を(4)式のように変形すれば、 σ_c はそれぞれ、 BQ_v / F 、 $BQ_v - (f_\phi)_{CW} \cdot \sigma_w / F$ 、 $EQ_v + (D\mu_{DL}Q_v) / F(1 + CQ_v / \sigma_w)$ と表される。これより、 σ_c は Q_v の関数であり、(7)式より Q_v がCECの大きさに比例することから、CECの大きな粘土鉱物が含まれるほど、導電率が高くなることがわかる。また、いずれの σ_c とも間隙水の導電率の関数であり、 μ_{DL} はイオン濃度によって変化するこ

とから、これらの式は σ_c が間隙水の導電率(イオン濃度)によって変化することを意味している。

ところで、ふつう電気二重層はあらゆる鉱物と間隙水との界面で形成される。したがって、厳密には粘土鉱物の有無にかかわらず、含水岩石や土壌の比抵抗は(3)式のような形で表現する方が望ましい。

Katsube and Hume(1983)は、間隙表面に生じる表面伝導に起因する比抵抗を導入して、

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho_p} + \frac{1}{\rho_c} \quad (10)$$

$$\rho_p = F \cdot \rho_w, \quad \rho_c = d\rho_s F,$$

という式を提唱した。ここで、 d は間隙の幅であり、 ρ_s は表面伝導による比抵抗である。ただし彼らは、 ρ_c を岩石固定の値としており、 ρ_w が無限大の時に、すなわち間隙水の導電率が0のときに求まる値としている。千葉・熊田(1994)は飽和させた花崗岩と凝灰岩試料の比抵抗測定を行い、 ρ_w が0.5~1 Ωm 以上になるとアーチーの式は成立しないことを明らかにし、測定結果に(10)式を適用して岩石試料ごとに ρ_c を求め、 ρ_w が高い領域では ρ_R は ρ_c に収束することを示した。そして、自然乾燥状態の比抵抗も測定し、湿潤状態と乾燥状態では ρ_c の値が大きく異なることを示し、 ρ_c は間隙表面の界面に形成される電気二重層に起因するものと考察した。また、西田・川上(2000)は砂岩と溶結凝灰岩試料の比抵抗を測定し、これらの岩石においても飽和含水時における ρ_R と ρ_w の関係は並列回路モデルで説明できることを確認するとともに、 ρ_c が含水量の減少とともに急速に大きくなることを示した。

5. 表面伝導を考慮した実験式

一方、岩石を構成する粒子あるいはその粒子表面に固定の比抵抗を与えた実験式も提唱されている。Bussian(1983)は、Hanai(1960)とBruggeman(1935)による等大球分散系モデルの導電率を求める理論式を、導電性粒子が存在する場合に適用し、第一次近似により次式のような理論式を示した。

$$\sigma_R = \phi^m \sigma_w + m\sigma_r(1-\phi^m) \quad (11)$$

ここで、 σ_r は岩石を構成する物質の導電率である。この式も σ_w からみれば、 ρ_c を固定した並列回路とみなすことができる。Bussian(1983)は粘土質岩石の比抵抗にこの式を適用し、間隙率や間隙水の比抵抗との関係を検討した。朴・松井(1998)も10種類・40個の岩石試料の比抵抗を測定し、その結果にこの式を適用し、岩石の比抵抗を解釈している。

また、茂木ほか(1983)は導電性薄殻による表面伝導効果を与えた回転楕円体粒子分散系モデルに対する比抵抗の算出式を導き、細粒土の比抵抗測定結果に適用した。

これらの式は実験結果で得られる個々の岩石や土の比抵抗と間隙水の比抵抗との関係をよく説明する。しかし、粒子あるいは粒子表面に与える固定の比抵抗は実験結果から求めており、その物理量の意味が説明されていない。比抵抗構造の解釈に当たっては、固定の比抵抗の決め方が問題になると考えられる。

6. 間隙の連結や形を考慮したモデル

アーチーの式では、岩石の電気伝導は間隙水のイオン電導に支配されることを前提にしている。そこで、間隙が電流の経路と考え、そのつながり方や形に注目して、岩石の電気伝導を評価する研究も行われている。たとえば、Brace and Orange (1968a, 1968b)は岩石に圧力を加えてその比抵抗変化を調べ、岩石の比抵抗は封圧をかけると間隙が閉鎖されるので高くなるが、破壊により割れ目が生じると1桁以上下がることを示し、比抵抗は割れ目のつながり方や形状に大きく影響されていると考察した。この結果は、岩石の比抵抗は間隙率だけではなく、間隙や割れ目の連結の様子や形に関係あることを示唆している。

そこで、Greenberg and Brace (1969)は間隙または割れ目を抵抗と考え、アーチーの式を抵抗のネットワークとして表すモデルを提唱した。さらに、Shankland and Waff (1974)は岩石中の間隙が割れ目によってつながっているモデルを提唱し、岩石の電気伝導を説明した。これらのモデルでは岩石を格子で表し、岩石の間隙を格子点どうしをつなぐ抵抗素子と考え、格子の分布や隣接する格子と格子とが結合する割合を確率で表し、それらの結合がなされればそこに電気伝導が生じると考えている。このような考えは浸透理論またはパーコレーションモデルと呼ばれ、岩石中の比抵抗や浸透率の説明に用いられている（西澤, 1986）。

一方、Peterson(1983)は岩石の割れ目を水や電流が通る等価な経路に置き換え、ダルシーの法則とオームの法則の類似性から、岩石の比抵抗を説明した。また、Brown (1986)は岩石の間隙を二つの平行な板で近似した割れ目と考え、その平行版にフラクタルで凹凸を与え、その隙間を流れる電流を計算し、岩石の電気伝導をモデル化した。このようなモデルは等価チャンネルモデルと呼ばれる。

パーコレーションモデルや等価チャンネルモデルは数値シミュレーションに適したモデルであり、間隙水の比抵抗や間隙（割れ目）の分布や形や大きさなどをいろいろと与えることで、不均質な岩石の比抵抗を計算することができる。逆に得られた比抵抗から試行錯誤的にモデリングすることで、岩石中の間隙の情報が推測でき、さらには異方性を評価できる可能性がある。まだ、電気二重層あるいは表面電導効果を考慮した並列回路モデルのシミュレーションは実施されていないが、いずれはアーチーの式が適用できない岩石に積極的に適用されていくと期待される。

7. おわりに

上述したように、岩石の比抵抗をアーチーの式で説明するのは限界があり、(3)式あるいは(4)式の形の並列回路モデルが多くの研究者によって提唱されている。導電性鉱物や電気二重層などによる過剰導電率を σ_c とすると、岩石の導電率は(1)式と(4)式より、

$$\sigma_R = (1/a) \cdot \phi^m \cdot S_w^n \cdot \sigma_w + \sigma_c \quad (12)$$

となる。この式からわかるように、岩石の導電率（比抵抗）は、迂回係数、間隙率、水飽和度、間隙水の導電率、過剰導電率など複数の物性に依存する。4章や5章で示したように、過剰導電率も複数の物性が関与している。このことは、岩石の比抵抗から地下の物性を一概に推定することは難しいと

いうことを意味するものである。そのため、実験式に基づいて比抵抗構造から地下におけるある物性の分布を推定するためには、その他の物性に関する先験的な情報が必要である。通常はそれらを全て得ることはできないので、足りない情報については過去の経験からの知識や仮定に基づき補う必要がある。当然、仮定した情報については大きな誤差を含む可能性が高いので、確かなことと不確かなこととを区別し、実験式の適用範囲と限界を考えることが肝要である。

参考文献

- Archie, G.E., The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics, *Trans. AIME*, **146**, 54-62, 1942.
- Brace, W. F. and Orange, Electrical resistivity changes in saturated rocks during fracture and frictional sliding, *J. Geophys. Res.*, **73**, 1433-1445, 1968a.
- Brace, W. F. and Orange, Further studies of the effects of pressure on electrical resistivity rocks, *J. Geophys. Res.*, **73**, 5407-5420, 1968b.
- Brown S. R., Transport of fluid electric current through a single fracture, *J. Geophys. Res.*, **94**, 9429-9438, 1989.
- Bruggeman, D.A.G., Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen Substanzen, *Ann. Physik*, **24**, 636-664, 1935.
- Bussian, A.E., Electrical conductance in a porous medium, *Geophysics*, **48**, 1258-1268, 1983.
- 千葉昭彦・熊田政弘, 花崗岩及び凝灰岩資料の比抵抗測定-間隙水の比抵抗が岩石比抵抗に及ぼす影響について-, 物理探査, **47**, 161-172, 1994.
- Clavier, C., Coates, G., and Dumanoir, J., The theoretical and experimental bases for the "dual water" model for the interpretation of shaly sands, *Ann. Mtg., Soc. Petr. Eng.*, SPE paper no.6859, 1977.
- Clavier, C., Coates, G., and Dumanoir, J., Theoretical and experimental bases for the dual-water model for interpretation of shaly sands, *Soc. Petr. Eng. J.* (April 1984), 153-167, 1984.
- Greenberg, R. J. and Brace, W. F., Archie's law for rock modeled by simple networks, *J. Geophys. Res.*, **74**, 2099-2102, 1969.
- Hanai, T., Dielectric theory on the interfacial polarization for two phase mixtures, *Bull. Inst. Chem. Res.*, Kyoto Univ., **39**, 341-367, 1961.
- Katsube T. J. and Hume, J. P., Electrical resistivities of rocks from Chalk River, *Proc. Ws. Geophys, Geosci. Res. at Chalk River*, 105-114, 1983.
- Patnode, H. W. and Wyllie, M. R., The presence of conductive solids in reservoir rocks as a factor in electric log interpretation, *Trans., AIME*, **189**, 47-52, 1950.
- Paterson, M. S., The equivalent channel model for permeability and resistivity in fluid-saturated rock -A re-appraisal, *Mech. mater.*, **2**, 345-352, 1983.
- 茂木透・本郷克己・佐々宏一, 細粒土の電気物性, 物理探査, **39**, 95-105, 1986.
- 西田薫・川上英二, 間隙水の比抵抗が岩石比抵抗に及ぼす影響と並列回路モデルを用いた検討, 物理探査, **53**, 167-181, 2000.
- 西澤修, 岩石物性に現れる「形」, 物理探査, **41**, 409-419, 1988.
- 朴三奎・松井保, 岩石比抵抗に関する基礎的研究, 物理探査, **51**, 201-209, 1998.
- Sen, P. N., Goode, P. A., and Sibbit, A., Electrical conduction in clay bearing sandstones at low and high salinities, *J. Appl. Phys.*, **63**, 4832-4840, 1988.
- Sen, P. N. and Goode, P. A., Influence of temperature on electrical conductivity on shaly sands, *Geophysics*, **57**, 89-96, 1992.
- Shankland, T. J. and Waff, H. S., Conductivity in field-bearing rocks, *J. Geophys. Res.*, **79**, 4863-4868, 1974.
- Worthington, P. F., The uses and abuses of the Archie equations, 1: The formation factor - porosity relationship, *J. Appl. Geophys.*, **30**, 215-228, 1993.
- Waxman, M. H., and Smits, L. J. M., Electrical conductivities in oil-bearing Shaly Sands, *Soc. Petr. Eng. J.*, **8**, 107-122, 1968.