

ウェーブレットを用いたガウス係数の時系列解析

浅利晴紀・清水久芳・歌田久司（東京大学地震研究所）

Time series analysis of gauss coefficients by the use of wavelet

S. ASARI, H. SHIMIZU, and H. UTADA

ERI, Univ. of Tokyo

1 はじめに

地球磁場は周期で $10^5 \sim 10^6$ 年(地磁気逆転)から約 1 秒(地磁気脈動)までと、非常に広い帯域を持って変動している。このうち周波数の高い方の成分は地球磁気圏や電離層に起因する磁場の変動である。主な原因は太陽活動に伴い磁気圏に擾乱が引き起こされるか、あるいは磁気圏そのものが歪められることによるものであり、外部起源の磁場変動と呼ばれる。特に日変化(Sq)、11 年を周期とする変化が卓越している。一方、60 年、400 年、8000 年程度を周期とする変動が報告されているが、これらは外核のダイナモ作用により生じた磁場が地上に現れた内部起源の変動である。観測された磁場の変動データをこれら 2 つの成分に分離することは、それぞれの起源の特性を検証する上で大変重要なことである。

欧州では他の地域と比較して高い密度で地磁気観測所が分布する。ここで 20 世紀の間に蓄積されたデータの東向き成分について 1 年ごとに差分を取って求めた永年変化(SV)は、その殆どが一様に注目される現象を見せている。特に顕著な 1969 年頃やその他の特定の年を境にしたトレンドの大きな変化である。この興味深い現象については多くの議論がこれまでになされているものの、その起源がどこに帰着されるかについては決定的な結論に至っていない。外部起源・内部起源の周期的な変動の一部なのか、外核の流動に突然生じた変化が電気伝導度を持ったマントルを抜けて地球上で観測されたもの(例えば jerk)なのか諸説さまざまに提唱されている。また 1969 年頃の現象に関しては欧州に限らず北米ほか多少の時間差はあるものの南半球においても同様の現象が観測されていることから、場合によってはグローバルな性質を持つこともあるようである。

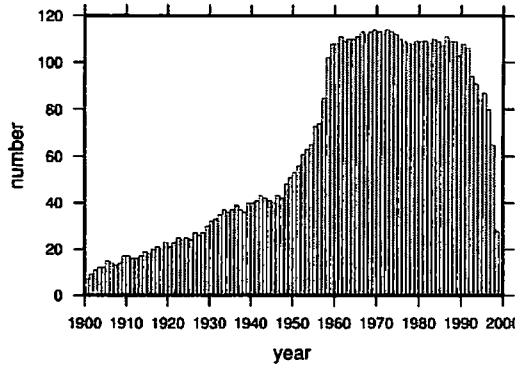
地磁気データを球関数展開してガウス係数を求めてから時系列解析することは、これらの点を包括的に検討する上で有効な方法であると考えられる。というのは、対象をグローバルに扱うことが出来る上、同時にその起源を内部・外部の成分に分離することになるからである。地磁気の西方移動に関連づけて問題を考察する方向にもつながる。

短く限られた長さのデータを調べるのには、MEM などによるスペクトル解析が優れている。ウェーブレットによる解析は、扱うデータの長さという点から見れば不利ではあるが、ALEXANDRECU *et al.*(1995)によるように、各時刻ごとの周波数解析をしながら、他方で連続多項式で表わされた関数の緊き目を検出することが出来るという特徴がある。しかも主観的に決めた特定の年だけを対象にして、アプリアリに与えておいた関数(仮に jerk と定義されている現象であるとしたら 2 次関数)の緊き目のみに着目した解析から免れることが可能となる。以上のことを考慮して、時系列解析についてはウェーブレットによる方法を採用することが適切であると判断した。

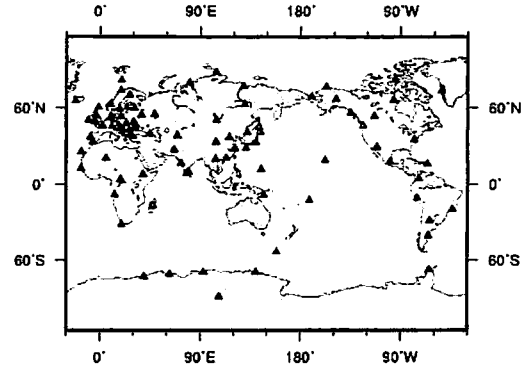
2 データの選択

ガウス係数を求めて内部・外部の成分に分離するという見通しから、磁気嵐の期間を含む年間の全ての観測値を使って導いた年平均値を用いる。まず、これまでに取得したデータについて、利用できる観測点数を各年ごとにプロットすると第 1 図が得られた。1958 年を期に観測点数が大きく増加している。

最も多くの観測点を用いることが出来る年においても、太平洋や極域など地域によってはその空間的分布が疎になる。次節に示すような最小二乗法に基づく球関数展開を行うにあたり、ガウス係数の時系列にデータ選択による不連続がなるべく生じないようにしたい。



第 1 図



第 2 図

そこで解析する期間で最初から最後まで通して使える '59~'91 年の 88 点を解析に用いることにした。その分布を第 2 図に示す。各データ時系列については、4 年以内の欠測と明らかに不自然な outlier を補正する以外は手を加えなかった。

3 ガウス係数

3.1 計算の方法

地球上で磁場の X, Y, Z 成分はガウス係数の線形結合で表わされる。

$$X(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(g_n^m + q_n^m) \cos m\varphi + \{h_n^m + s_n^m\} \sin m\varphi] \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \quad (1)$$

$$Y(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n m [(g_n^m + q_n^m) \sin m\varphi - \{h_n^m + s_n^m\} \cos m\varphi] P_n^m(\cos \theta) \quad (2)$$

$$Z(\theta, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\{(n+1)g_n^m - nq_n^m\} \cos m\varphi + \{(n+1)h_n^m - ns_n^m\} \sin m\varphi] P_n^m(\cos \theta) \quad (3)$$

このうち Z を含む最低 2 成分のデータを用いることで、ガウス係数の内外分離をすることが可能になる。ただし zonal の係数を求める為には X 成分を使う必要がある。ここでは X と Z の 2 成分を使うことにする。

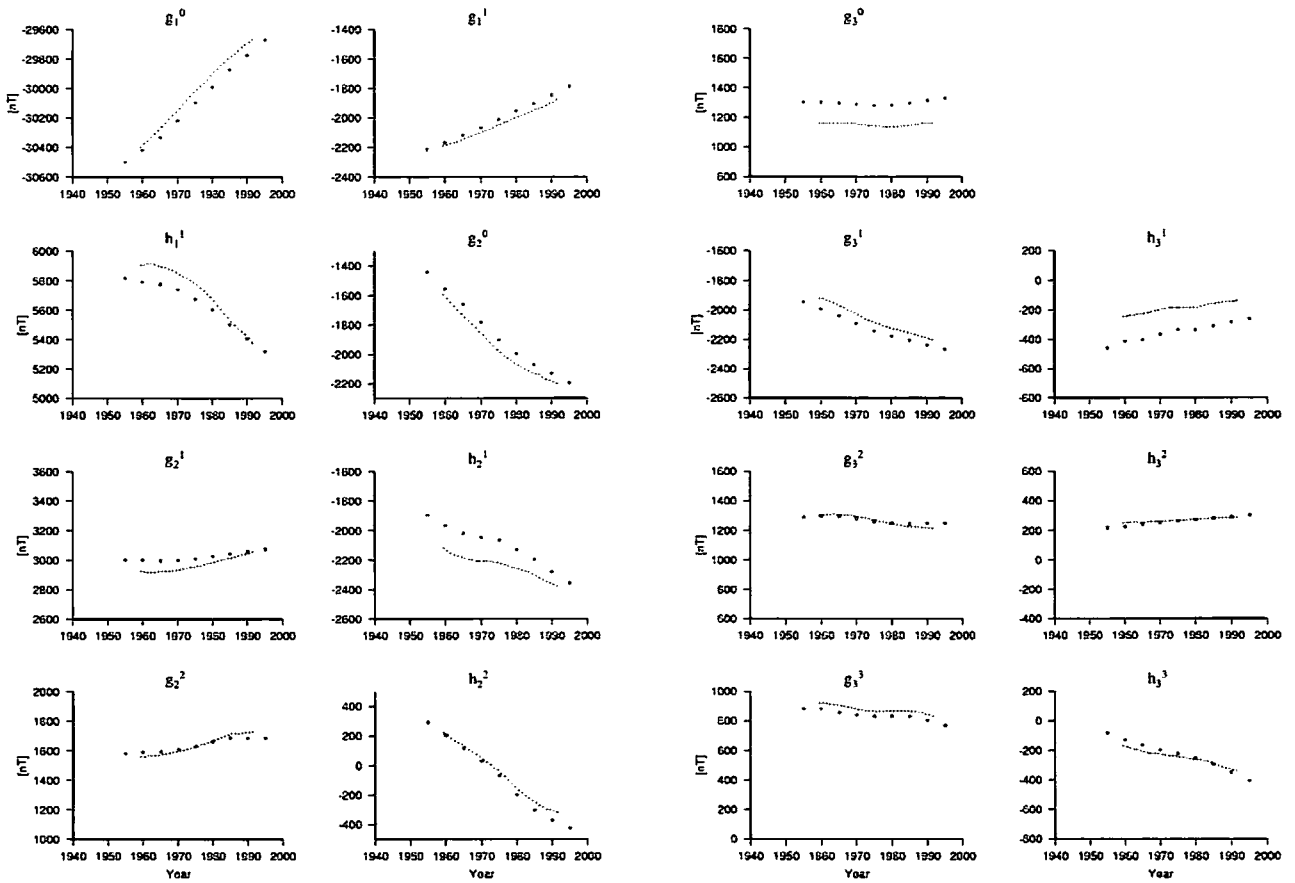
ガウス係数の決定は GUBBINS(1983) の stochastic inversion に従った。コア表面上の磁場の分散について予め制約を与えた上で最小二乗解を推定する方法である。

データのベクトルが \mathbf{x} 、ガウス係数 (内部と外部から成る) のベクトルが \mathbf{y} 、 \mathbf{A} が $(n+1) \cos m\varphi P_n^m(\cos \theta)$ を要素とするような行列であるとすると、上記の線形結合は $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}$ と書かれる。誤差 \mathbf{e} は全て平均が 0、標準偏差が 1nT の正規分布で互いに相関が無いとし、データの誤差行列 \mathbf{E} を単位行列にした。一方ガウス係数に対し先験的に課す誤差の制約については、平均 0 で互いに無相関であるとし、 n 階の係数について分散を v_n と表記するとき

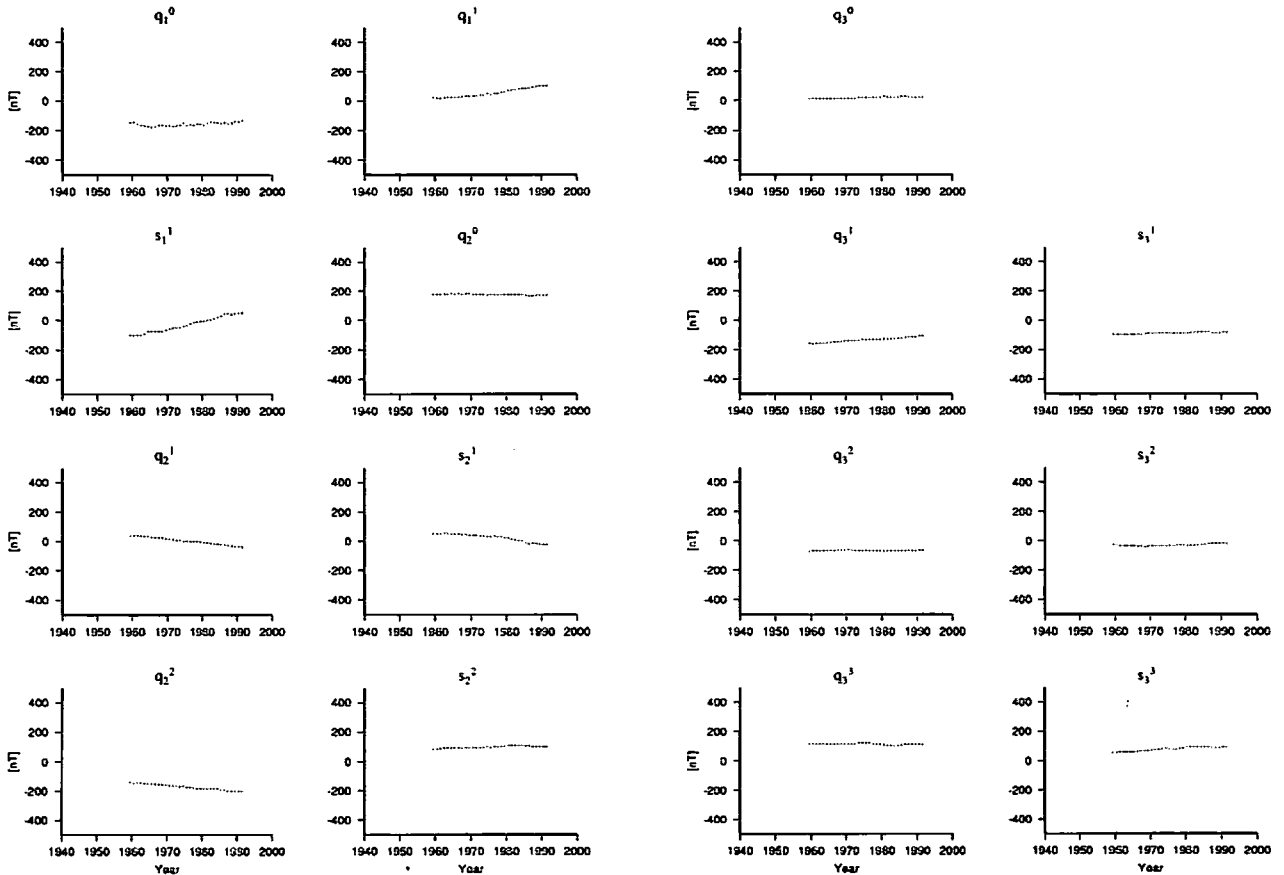
$$v_n^{-1} = \lambda(n+1)^2 \left(\frac{a}{c}\right)^{2n+4} \quad (4)$$

を与えた。 a, c はそれぞれ地球とコアの半径 ($a/c \simeq 1.873$)、 λ はダンピング定数である。これはコア-マントル境界上で r 方向のモデル磁場の分散が、係数の各階から等しく寄与を受けているとするものである。 v_n を対角成分とする共分散行列を \mathbf{D} とすると、ガウス係数は以下に決まる。

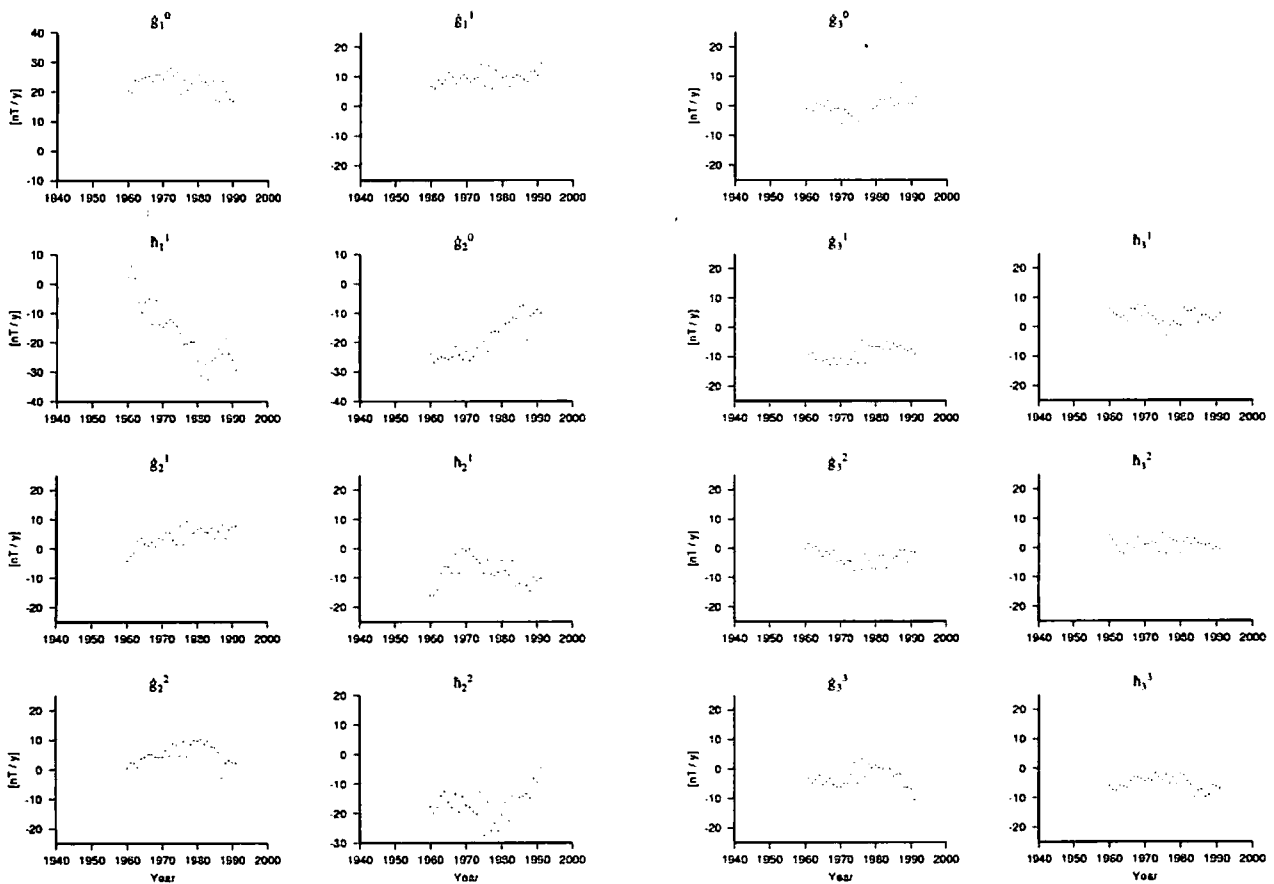
$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{y}, \quad \mathbf{H} \equiv (\mathbf{A}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{D}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{E}^{-1} \quad (5)$$



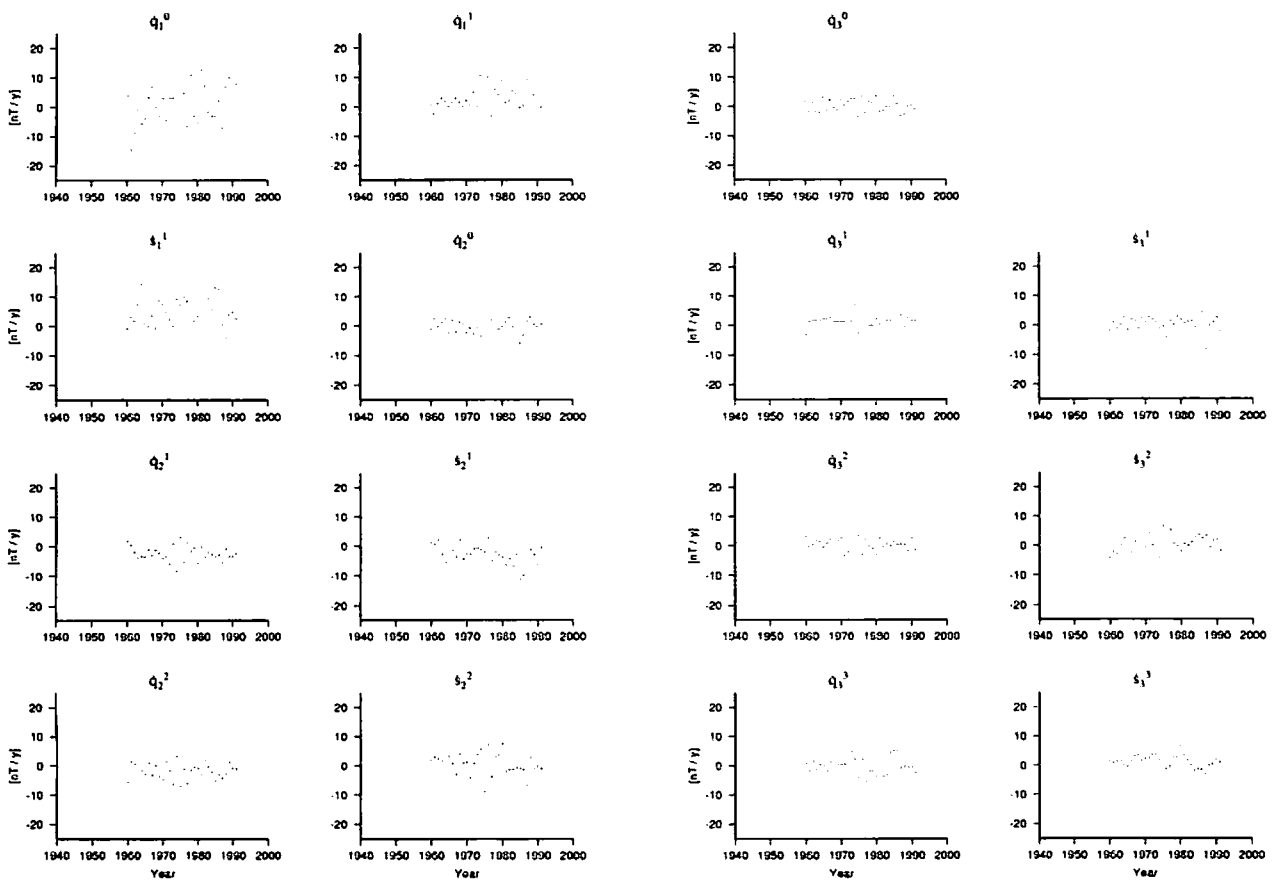
第 3 图



第 4 图



第 5 图



第 6 图

3.2 結果

データの数が88点あることから原理的には8次までガウス係数を求めることが可能であるが、打ち切りの次数は内部・外部ともに6までとした。X, Zそれぞれについて \bar{x} を求めておき、最後に係数の内外分離を行った。ダンピング定数 λ については、GUBBINS(1983)を参考にして $\lambda = 2.0 \times 10^{-4}$ を採用した。

第3図が内部起源の係数 g_n^m, h_n^m を時間に対してプロットしたもので、+印が今回の計算結果、☆印がDGRF(1995年はIGRF)を表わす。展開された係数はDGRFと完全には一致していないことがわかる。DGRFに接近する方が望ましいのであるが、ほとんどが平行移動しているようでもあるので、変動についてのみ解析を行う次節の時系列解析には、この計算結果をそのまま使用することにした。

外部起源の係数 q_n^m, s_n^m が第4図である。 q_1^0 は細かい変動をしているようではあるが、太陽活動に対応する11年周期の変動はこれだけでは確認できない。また、non-zonal成分にも0値からのオフセット及び、期間全体に渡って続くトレンドが見受けられる。

各観測点のそれぞれのデータから前もってSV[nT/y]を求めておき、それらに対しても上記と同じ設定(打ち切り次数、ダンピング定数)でガウス係数の時間微分 \dot{g}_n^m, \dot{q}_n^m etc.を計算した(第5, 6図)。1970年頃の \dot{h}_2^1 や1980年頃の \dot{g}_2^2 で、目立ったトレンドの変化が確認できる。欧州のY成分で同時期にはっきりと現れる変動に対応するものと考えられる。

4 ウェーブレット

4.1 ウェーブレット解析について

1980年代初期に石油探査技師のアイデアから始まり、1989年頃から数学的基礎が築かれる。時間周波数解析を行う方法のひとつである。主要な周期の同定あるいは自己相似性の検出を目的とするフーリエ解析と異なり、核関数(ウェーブレット)の局所性から、データの持つ局所相似性の解析に非常に適している。ただ、まだ使用方法がある程度までしか確立されていないので、如何に応用するかはユーザー次第である。

連続ウェーブレット変換とは、局在する波すなわちマザーウェーブレット $\psi(t)$ を時間方向に a というパラメータで伸縮させ、それを時系列に畳み込むという操作である。そうして得られた結果は、横軸に時間 t 、縦軸に周期に対応する値 a をとって2次元平面上にプロットされる。

ここで選んだマザーウェーブレットは、ALEXANDRESCU *et al.*(1995)に従い

$$\psi(t) = \frac{d^3}{dt^3} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (6)$$

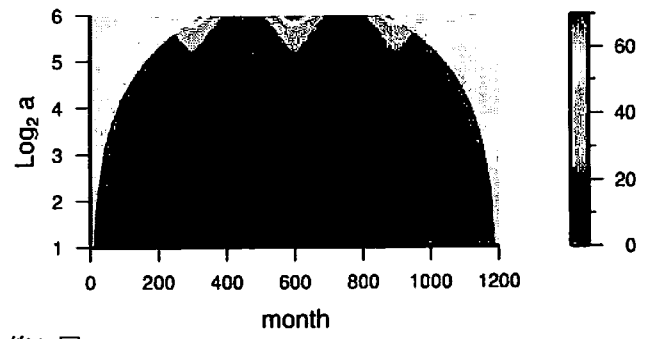
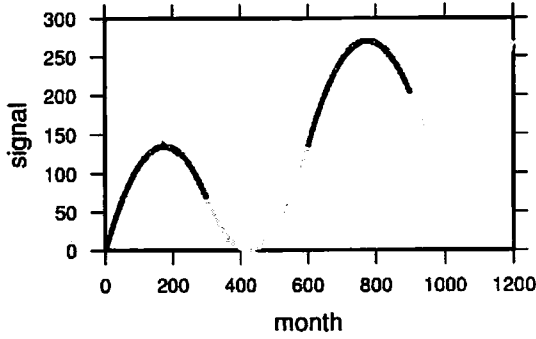
$$\psi_a(t) = a^{-1} \psi\left(\frac{t}{a}\right) = a^2 \frac{d^3}{dt^3} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \quad (7)$$

とした。2階微分が不連続になるという、いわゆるjerk($j(t)$; $j'''(t) = \delta(t)$)が時系列にあるとしたとき、ウェーブレット変換 \mathfrak{W} により

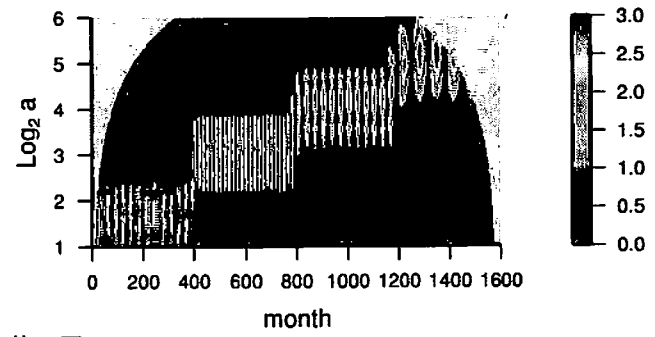
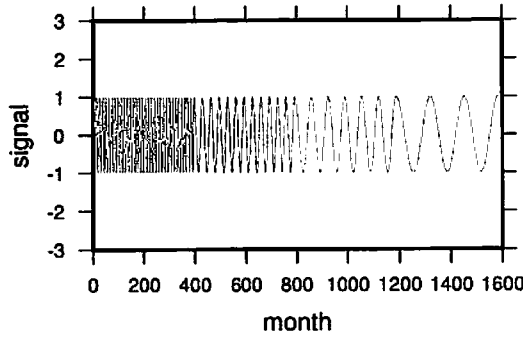
$$\begin{aligned} \mathfrak{W}j(t) &\equiv \psi_a(t) * j(t) = a^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) * \frac{d^3}{dt^3} j(t) \\ &= a^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) * \delta(t) = a^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

というように、jerk発生時を中心とするガウス分布状のピークを得るからである(*は畳み込み)。放物線を合成して作成した関数を変換した例である第7図のように、jerkの起きた時刻に極大をとるように縦軸に平行なリッジが走る。縦軸は $\log_2 a$ 、横軸の単位は1ヶ月で、変換値は絶対値をとる(以降も同様)。極大値は a の2乗に比例し、 a が増加するにつれて時間方向に裾が広がっている。

正弦波に対する変換の結果は第8図の通りである。変換される関数は左側から1, 3.7, 5.5, 11年を周期とするような正弦波を繋いだものである。横軸に沿って変換した正弦波と同じ周期の変化が見られる。縦軸方向には



第7図



第8図

周期に応じた a の値を取る位置でピークを持つという特徴がある。式で表わすと以下になる。

$$\mathfrak{W} \sin \omega t = -\sqrt{2\pi} a^3 \omega^3 \exp\left(-\frac{a^2 \omega^2}{2}\right) \cos \omega t \quad (9)$$

これから 11 年周期の正弦波は変換すると $\log_2 a \approx 5.2$ で極大をとることがわかる。jerk の場合と明らかに違う点は、 a の方向に極大値を持つところにある。

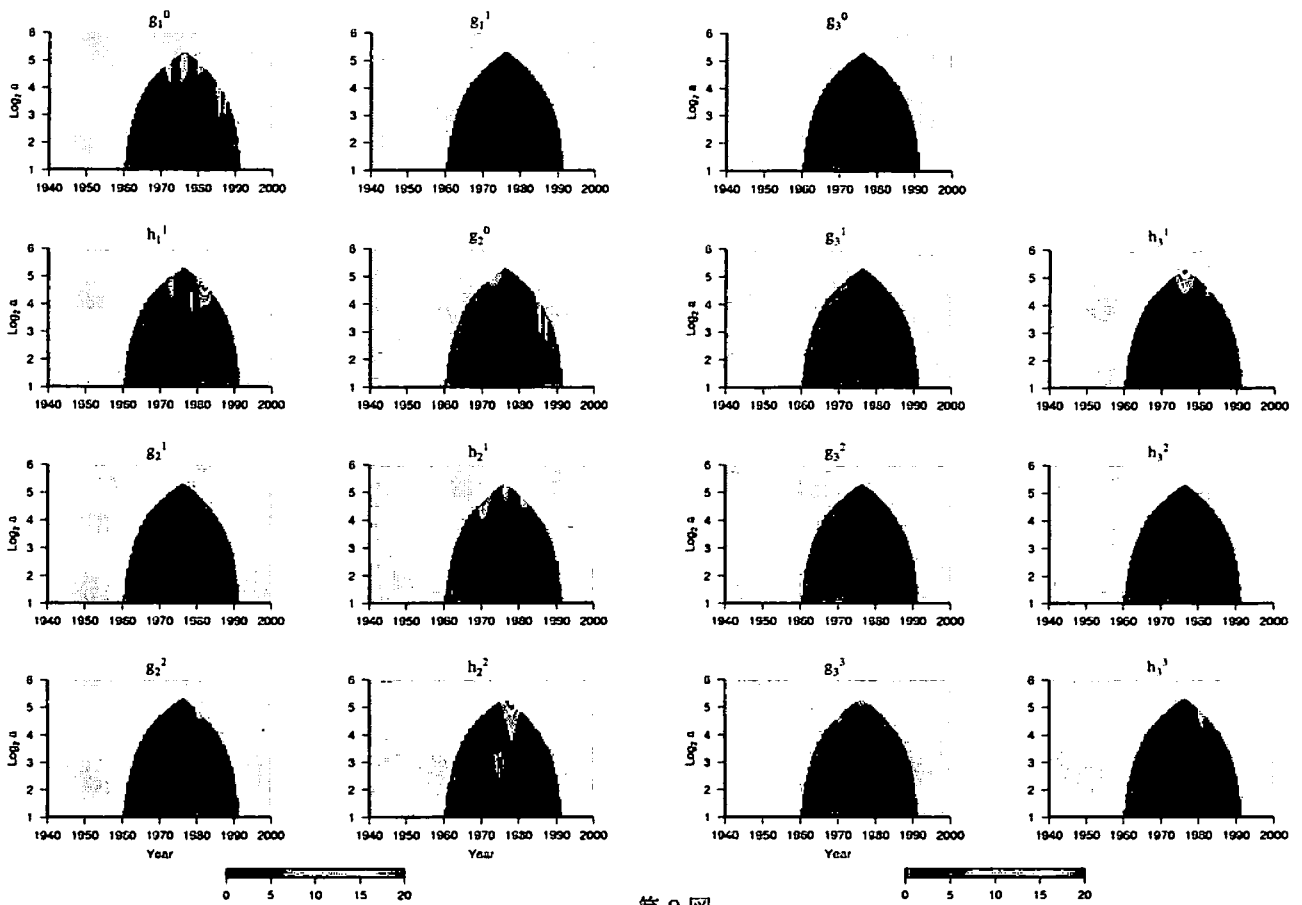
4.2 ガウス係数の変換

ガウス係数の時系列は 1 年ごとと求められているが、まずこれを 3 次スプラインで繋いで 1 ヶ月ごとの値にした。3 次スプラインは 2 階微分まで連続なので、変換した際も節点あたる時刻に jerk のときのようなピークが現れることはない。

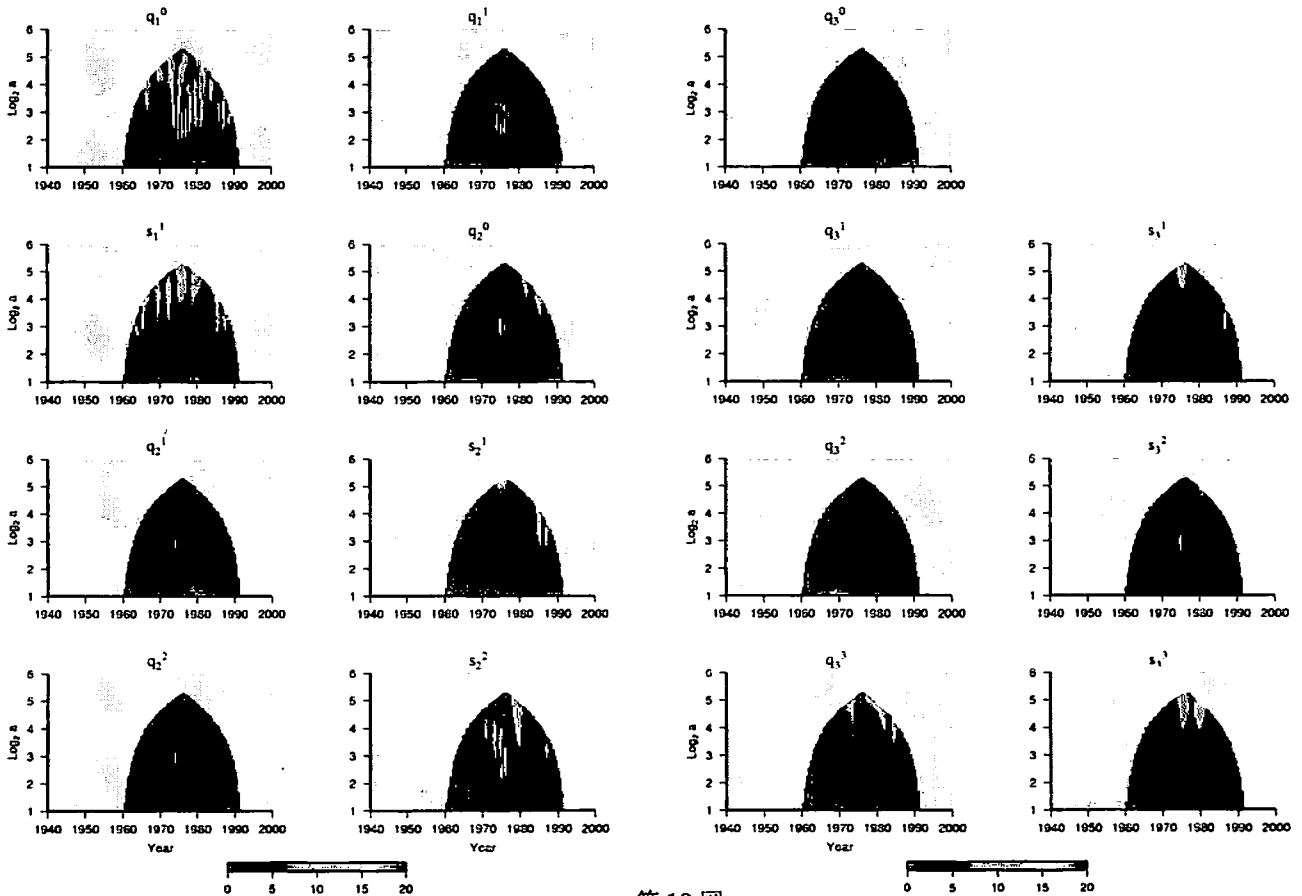
厳密に言えば、マザーウェーブレット $\psi(t)$ はサポートコンパクトではない。実際の変換では $\psi(t) (-5 \leq t \leq 5)$ のみを畳み込むこととし、それ以外については十分に 0 に近いとして無視した。時系列の両端で、この範囲の内側にあたる部分にデータが無く、完全に畳み込みを行うことが出来ない場合は適切な変換をすることが出来ない。そのため変換後は a が大きくなるほど時間方向に狭くなる (convolutional edge effect)。

変換された各ガウス係数を第 9、10 図に示す。このうち強い振幅が現れているのは、内部起源で $g_2^0, h_2^1, g_3^1, g_3^3$ (70 年前後)、 $h_1^1, h_2^2, g_2^2, h_2^3, h_3^3$ (80 年前後) である。ほかに h_3^3 で 70 年代半ばに出ている。しかし時系列の限られた長さのために、挙動をある程度ははっきりと確認することが出来るのが 1970 年頃から 1980 年頃までしかない。しかも a の上限が $\log_2 a$ の値で最も大きくて 5.3 なので、11 年程度の周期と放物線の繋ぎ目を区別することは難しい。

外部起源については、周期的であると判断できる結果が多い中で、 $q_3^1, s_3^1, q_3^3, s_3^3$ が 70 年代に強い振幅を見せている。ただこれらは non-zonal 成分であるので、外部起源に jerk のような現象が起こったというより、ガウス係数の内外分離の不十分さによる影響が現れたと考える方が自然である。



第 9 图



第 10 图

q_1^0 が 11 年を周期として変動しているかどうかは、今回の結果でははっきりと確認することができない。 $\log_2 a$ の値が 3 から 4 のあたりに極大を持つようにもみえる。この場合 2.4 年～4.8 年の周期を持つ変動に対応することになる。

5 まとめ

88 点の地磁気観測所の時系列データを用いて、1959 年から 1991 年まで内部・外部起源のガウス係数をともに 6 次まで推定した。内部起源のガウス係数 g_n^m, h_n^m は IGRF・DGRF と比較すると、ある程度平行移動しているようではあるものの、その間には大きいところでは 200nT 程の差が見られた。その原因についてはさしあたり 2 つ程挙げられる。まず、これはガウス係数の打ち切りの次数とも関連するが、IGRF を求めるのに使われたデータセットと今回用いたものは同じではないということである。実際には、地上の観測点数を比較するだけでもかなり少ない。それから、観測点付近の地殻が持つ磁化に起因する磁場異常に関して補正を行っていないことも考えられる。コア起源の磁場をより厳密にモデル化するためには当然なされるべき手順である。

外部起源のガウス係数 q_n^m, s_n^m については、 $n=1$ の係数で太陽活動を反映する 11 年の周期がはっきりと見られなかった。non-zonal な係数にはトレンドや 0 値からのオフセットが現れた。annual の平均をとっているにもかかわらず、外部起源の磁場に経度方向の依存性があり、更にそれが時間変化しているということになる。これは不自然である。内部の係数にも影響することであり、今後修正を要する点である。

ウェーブレット解析からは、係数ごとに異なる時刻で強い応答があるという結果が得られた。1970 年、1980 年前後の jerk と呼ばれる現象に対応するような変動をする係数がいくつか存在することがわかった。ただしこれが jerk の発生を意味するものなのか、周期的な変動の一部なのか判別することはデータの長さが不十分なため現段階では明確に出来ない。外部起源の方にも同様の挙動を示す係数があったが、いずれも non-zonal 成分であるため、外部に由来するというより、内外分離の不十分さから生じた内部起源の影響を見ているものと推測される。

ガウス係数の内外分離をより確実に行うことが、まず重要な課題であることがわかった。分離について明らかな基準となるものは無いが、最低でも外部起源の non-zonal 係数に関する上記の点は除去されるべきである。

参考文献

- [1] ALEXANDRESCU, M., D. GIBERT, G. HULOT, J.-L. LE MOUËL, and G. SARACCO, Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis, *J. Geophys. Res.*, 100, 12,557-12,572, 1995.
- [2] GUBBINS, D., Geomagnetic field analysis — I. Stochastic inversion, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 73, 641-652, 1983.
- [3] GUBBINS, D., Geomagnetic field analysis — II. Secular variation consistent with a perfectly conducting core, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 77, 753-766, 1984.
- [4] LE HUY, M., M. ALEXANDRESCU, G. HULOT, and J.-L. LE MOUËL, On the characteristics of successive geomagnetic jerks, *Earth Planets Space*, 50, 723-732, 1998.
- [5] MALIN, S. R., and B. M. HODDER, Was the 1970 geomagnetic jerk of internal or external origin?, *Nature*, 296, 726-728, 1982.
- [6] SABAKA, T. J., R. A. LANGEL, R. T. BALDWIN, and J. A. CONRAD, The geomagnetic Field 1900-1995, Including the Large-Scale Field from Magnetospheric Source, and the NASA Candidate Models for the 1995 Revision of the IGRF, *J. Geomag. Geoelectr.*, 49, 157-206, 1997.