

地殻の磁化不均質を考慮した地震地磁気効果

宇津木 充、西田 泰典 (北海道大学理学研究科)

The Seismomagnetic Effect considering the Inhomogeneity of Crustal Magnetization

Mitsuru Utsugi and Yasunori Nishida (Graduate School of Science, Hokkaido University)

1 はじめに

従来、地震地磁気効果の理論計算には一様磁化構造を持つ地殻モデルが多く用いられてきたが、より現実的な地震地磁気効果の見積もりのために、不均質な磁化構造を持つ地殻モデルでの磁化変化を計算した。

地震に伴う地磁気変化は、媒質中の帯磁した領域の表面での表面積分で表される。従って従来の、地温がキュリー一点に達する深さまで一様に磁化しているとする地殻モデルでは、この式は2次の無限積分で表される。これに対し、磁化の不均質を与えた場合にはこの式は有限区間の2重積分に置き換わる。ここで被積分関数の形から、2重積分のうちの一方を楕円積分を用いて解析的に解くことが可能であることが示され、従って地磁気変化を、被積分項に楕円積分を含む1次の積分で表す事が出来る。この式を数値的に解くことで不均質磁化構造を持つ地殻モデルでの地磁気変化を見積もることが出来る。

2 楕円積分を用いた地磁気変化の表現

帯磁の異なる領域の境界面を S とすると、地震に伴う地磁気変化 $\Delta \mathbf{M}$ は S 上の面積分で次のように表される。

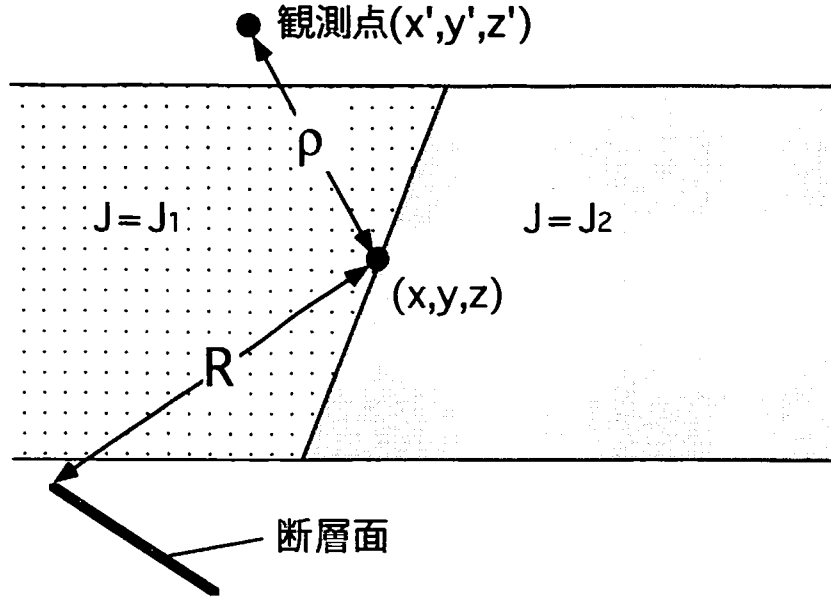
$$\begin{aligned}\Delta M_i &= -\frac{\partial W^k}{\partial x'_i} \\ &= -C_k \iint_S \left[\left\{ -\frac{\partial u_k(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \Delta \mathbf{m}^k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \right\} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\rho} + u_k(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial n} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dS_{\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\Delta m_l^k = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - \delta_{kl} \nabla \mathbf{u}, \quad \rho = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$$

ここで、 λ, μ は Lamé 常数、 $\mathbf{u}$ は地震により生じる変位、 $\mathbf{r}'$ は観測点の位置ベクトルを表す。また W^k は媒質の初期磁化の k 成分により作られるピエゾ磁気ポテンシャルを表し、 C_k はピエゾ磁化の磁化モーメントを表す。 ρ は S 上の任意の点と観測点の距離を表す。また、断層面と S 上の点との距離を R とすると (第1図)、 $\mathbf{u}$ は $1/R$ の関数で表される (Okada, 1992)。(1)には次のような形の積分が現れる。

$$\iint f \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{\rho} dS_{\mathbf{r}}, \quad \iint g \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial n} \frac{1}{\rho} dS_{\mathbf{r}}$$

このような形の2重積分のうちの1つの積分については、変数変換を施すことで楕円積分を用いて解析的に解くことが出来る。その変数変換の方法について以下に示す。



第1図 R, ρ の幾何学的意味

ここで、簡単な例として

$$\int \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\rho} dx \quad (2)$$

という積分を考える。ここで、簡単の為に

$$\begin{cases} R^2 &= x^2 + \zeta^2 \\ \rho^2 &= x^2 - 2x'x + c'^2 \\ \zeta^2 &= y^2 + (D - z)^2 \\ c'^2 &= x'^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \end{cases}$$

とおく。ここで、 (x, y, z) は媒質中の任意の点、 (x', y', z') は観測点の位置を表す。また

$$\begin{cases} D^2 &= (c'^2 - \zeta^2) + 4x'^2\zeta^2 \\ \alpha &= \frac{c'^2 - \zeta^2 - D}{2x'} \\ \beta &= \frac{c'^2 - \zeta^2 + D}{2x'} \quad (\alpha \leq \beta) \end{cases}$$

として、 $1/R$ 、 $1/\rho$ に変数変換

$$x \rightarrow \frac{\alpha t + \beta}{t + 1} \quad (3)$$

を施すことで

$$\frac{1}{R} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p(\alpha)}} \frac{|t+1|}{\sqrt{t^2 + \xi^2}}, \quad \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q(\alpha)}} \frac{|t+1|}{\sqrt{t^2 + \eta^2}}$$

と、変換される。ここで、

$$\begin{cases} p(s) &= s^2 + \zeta^2 \\ q(s) &= (x_0 - s)^2 + c^2 \\ \xi^2 &= p(\beta)/p(\alpha) \\ \eta^2 &= q(\beta)/q(\alpha) \quad (\xi^2 > \eta^2) \end{cases}$$

である。従って、(2)は

$$\int \frac{1}{R\rho} dx = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{p(\alpha)q(\alpha)}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + \xi^2} \sqrt{t^2 + \eta^2}} dt$$

と書き換えられる。これに更に変数変換

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{t}{\eta} \right) \quad (4)$$

を施すことにより次のように書き換えられる。

$$\int \frac{1}{R\rho} dx = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{p(\alpha)q(\alpha)}} \frac{1}{\xi} F(\varphi, k)$$

ここで、 $F(\varphi, k)$ は第1種楕円積分で

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta, \quad k = \frac{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}{\xi}$$

である。このように、変数変換(3)、(4)を用いて(1)の2重積分の1つの積分を解くことが出来る。以下に(1)に現れる積分の解のいくつかを示す。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{R\rho^3} dx &= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{p(\alpha)}\sqrt{q(\alpha)}^3} \left[I_{11} + (1 - b^2)I_{13} + \int \frac{2t}{\sqrt{t^2 + \xi^2} \sqrt{t^2 + \eta^2}^3} dt \right] \\ \int \frac{x}{R\rho^3} dx &= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{p(\alpha)}\sqrt{q(\alpha)}^3} \left[\alpha I_{11} + (\beta - \alpha\eta^2)I_{13} + \int \frac{(\alpha + \beta)t}{\sqrt{t^2 + \xi^2} \sqrt{t^2 + \eta^2}^3} dt \right] \\ \int \frac{1}{R^3\rho^3} dx &= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{p(\alpha)}^3 \sqrt{q(\alpha)}^3} \left[I_{11} - (\xi^2 + \eta^2 - 6)I_{13} + (\xi^4 - 6\xi^2 + 1)I_{33} \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{4t(t^2 + 1)}{\sqrt{t^2 + \xi^2}^3 \sqrt{t^2 + \eta^2}^3} dt \right] \\ \int \frac{x}{R^3\rho^3} dx &= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{p(\alpha)}^3 \sqrt{q(\alpha)}^3} \left[\alpha I_{11} - \{\alpha(\xi^2 + \eta^2) - 2(\alpha + \beta)\}I_{13} \right. \\ &\quad \left. + (\alpha\xi^4 - 3(\alpha + \beta)\xi^2 + \beta)I_{33} + \int \frac{t\{(3\alpha + \beta)t^2 + \alpha + 3\beta\}}{\sqrt{t^2 + \xi^2}^3 \sqrt{t^2 + \eta^2}^3} dt \right] \end{aligned}$$

(これらの式の右辺に含まれる積分はいずれも解析的に解くことが出来るがここでは省略する。) ここで、

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{\xi} F(\varphi, k) \\ I_{13} &= \frac{1}{\xi\eta^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[\xi^2 E(\varphi, k) - \eta^2 F(\varphi, k) \right] \\ I_{33} &= \frac{1}{\xi\eta^2(\xi^2 - \eta^2)^2} \left[(\xi^2 + \eta^2)E(\varphi, k) - 2\eta^2 F(\varphi, k) \right] - \frac{t}{\xi^2(\xi^2 - \eta^2)\sqrt{(t^2 + \xi^2)(t^2 + \eta^2)}} \end{aligned}$$

また、 $E(\varphi, k)$ は第2種楕円積分で

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

である。これらを用いて(1)の2重積分の1つの積分を解くことが出来る。

3 楕円積分の表現

前章で楕円積分を用いたが、一般に計算機では楕円関数は組み込み関数になっていない。そこでこの章では楕円積分の計算方法について考える。楕円積分にはいくつかの計算方法があるが、ここでは次のようなものを用いた。

3.1 完全楕円積分

積分の上限 $\varphi = \pi/2$ の時の楕円積分を完全楕円積分という。この関数の近似値は次節の方法でも求められるが、より効率良く、精度良く求めるために次のような方法を用いた。

$k' = \sqrt{1-k^2}$ として $K = F(\pi/2, k)$, $K' = F(\pi/2, k')$ とおき、これらから次のように定義する。

$$\begin{aligned}\tau &= iK'/K \\ q &= e^{i\pi\tau} = e^{-\pi K'/K} \\ q' &= e^{-\pi K/K'} = e^{i\pi/\tau} = \exp(\pi^2/\log q)\end{aligned}$$

ここで、 q は k から次の手順で求められる。

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

とすると

$$\epsilon = \frac{q + q^5 + q^{25} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots}$$

であるから、これを

$$q = \epsilon + 2\epsilon q^4 - q^9 + 2\epsilon q^{16} - q^{25} + \dots$$

として逐次反復法で解くと

$$q = \epsilon + 2\epsilon^5 + 15\epsilon^9 + 150\epsilon^{13} + 1707\epsilon^{17} + 20910\epsilon^{21} + O(q^{25})$$

となる。 k が小さい場合は、上の式の有限項までの和で近似できるが、 k が大きい場合には k を k' に置き換え q' を求めた後

$$q = \exp(-\pi^2/\log(1/q'))$$

から q を求められる。こうして求められた q から、 $F(\pi/2, k)$ 、 $E(\pi/2, k)$ は次のようにして求められる。

$$\begin{aligned}t &= 2(q + q^4 + q^9) + 1 \\ F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= \frac{\pi t}{2} \\ E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= \frac{\pi}{6t} (1 + (2 - k^2)t^2 - (24q^2(1 + 3q^2 + 4q^4 + q^4(7q^2 + 6q^4)))\end{aligned}$$

3.2 不完全楕円積分

$\varphi \neq \pi/2$ の時の楕円積分を、不完全楕円積分と言う。ここで、 $k < 1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} &= 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 \varphi + \frac{5}{16}k^6 \sin^6 \varphi + \dots \\ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} &= 1 - \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8}k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{16}k^6 \sin^6 \varphi - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

と表される。この式の右辺は項別に積分可能なので、これを積分して $F(\varphi, k)$ 、 $E(\varphi, k)$ が無限級数で表される。ここで、そうして求められる級数は k が小さいとき速く収束することが知られている。そこで、(5) から得られる級数の第4項までをとったもので F 、 E の近似値を求めるものとする。

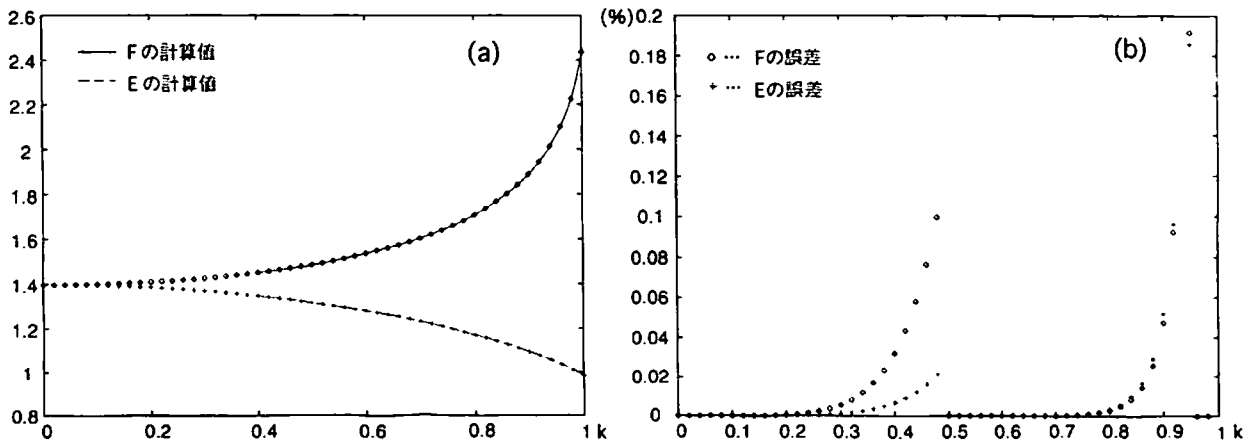
しかし、こうして求められた計算値は k が1に近付くと精度が悪くなる。そこで、そうした場合の楕円積分を求めるために、次の Landen の変換 (Byrd and Friedman, 1954) と呼ばれるものを用いる。

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1-k'}{1+k'} \\ \tan(\varphi_1 - \varphi) &= k' \tan \varphi \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= \frac{1+k_1}{2} F(\varphi_1, k_1) \\ E(\varphi, k) &= \frac{1}{1+k_1} \left\{ E(\varphi_1, k_1) - \frac{1-k_1^2}{2} F(\varphi_1, k_1) + k_1 \sin \varphi_1 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。これを Landen の変換と言う。 k_1 は k よりも小さくなるので、これにより母数 k が大きい場合の楕円積分をより小さな母数 k_1 を持つ楕円積分で表すことが出来る。ここで (5) から得られる近似式で楕円積分を計算する場合母数が小さいほど精度良く楕円積分を計算できるので、(6) の左辺をそのまま計算するよりも、母数の小さな楕円積分で表されている右辺を計算するほうが精度良く求められる事が分かる。また、更にこの変換を繰り返すことで母数 k が1に近い値の場合の楕円積分でも精度良く求められる。第2図 (a)、(b) に、Landen の変換を施す条件として $k < 0.5$ とした場合の計算結果と真の値との相対誤差を示す。



第2図 楕円積分の計算値と真の値との比較 ($\varphi = 80^\circ$)

(a): 実線と点線は第1種、第2種の楕円積分の計算値。◇と+は第1種、第2種楕円積分の真の値。

(b): 楕円積分の計算値と真の値との相対誤差。◇と+は第1種、第2種楕円積分の誤差。

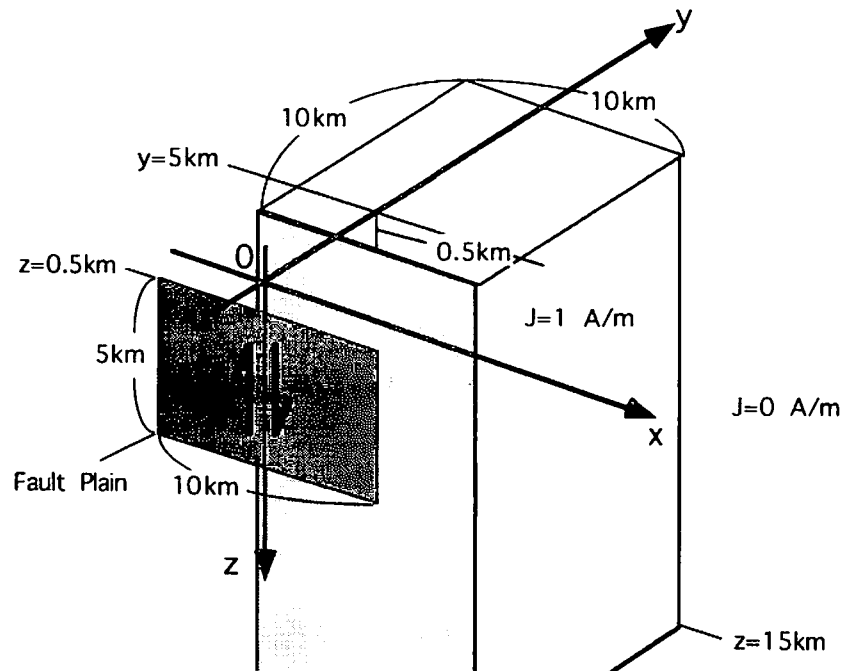
4 計算例

前章で求められる楕円積分を用いて、地磁気変化の式(1)の2重積分のうちの1つの積分を解くことが出来る。また、残りの積分についてはDEM(2重指数関数型数値積分公式)(森,1980)を用いて数値的に解くものとする。こうして、地震地磁気効果を見積もることが出来る。

その計算例として、第3図の様な磁化不均質を考える。これは、深さ0.5kmの $10 \times 10 \times 14.5$ kmの領域のみが帯磁(1A/m)しておりそれ以外は無帯磁であるとしたものである。このブロックから5km離れた位置でdip型の断層運動が生じた場合の地磁気変化を計算した。この計算に用いたパラメータは第1表に示されている。第4図(a)は全磁力の変化のパターン、(b-1)はy軸上での地磁気変化のプロファイルを表し、(b-2)は地表から15kmまで一様磁化した地殻モデルでの地磁気変化を表す。ピエゾ磁気効果では一様磁化モデルの場合よりも不均質磁化モデルの方が地磁気変化が大きくなることが既にOshiman(1990)によって指摘されている。ピエゾ磁気効果によって生じる磁化変化は媒質の初期磁化によるので、一様磁化モデルの場合ピエゾ磁化が連続に分布するのに対し、不均質磁化構造の場合帯磁した領域の表面でピエゾ磁化が不連続になる。これにより、帯磁した領域の境界面の近傍で大きな地磁気変化が期待されると考えられる。今回の計算においても、第4図(a)でブロックの端面近傍の大きな地磁気変化が見られた。また第4図(b)より、従来の一様磁化モデルでの計算結果と比べるとブロックの端面($y = 5$ km, $y = 15$ km)で地磁気変化が数十倍にも増幅されるという結果が得られた。

第1表 地磁気変化の計算に用いたパラメータ

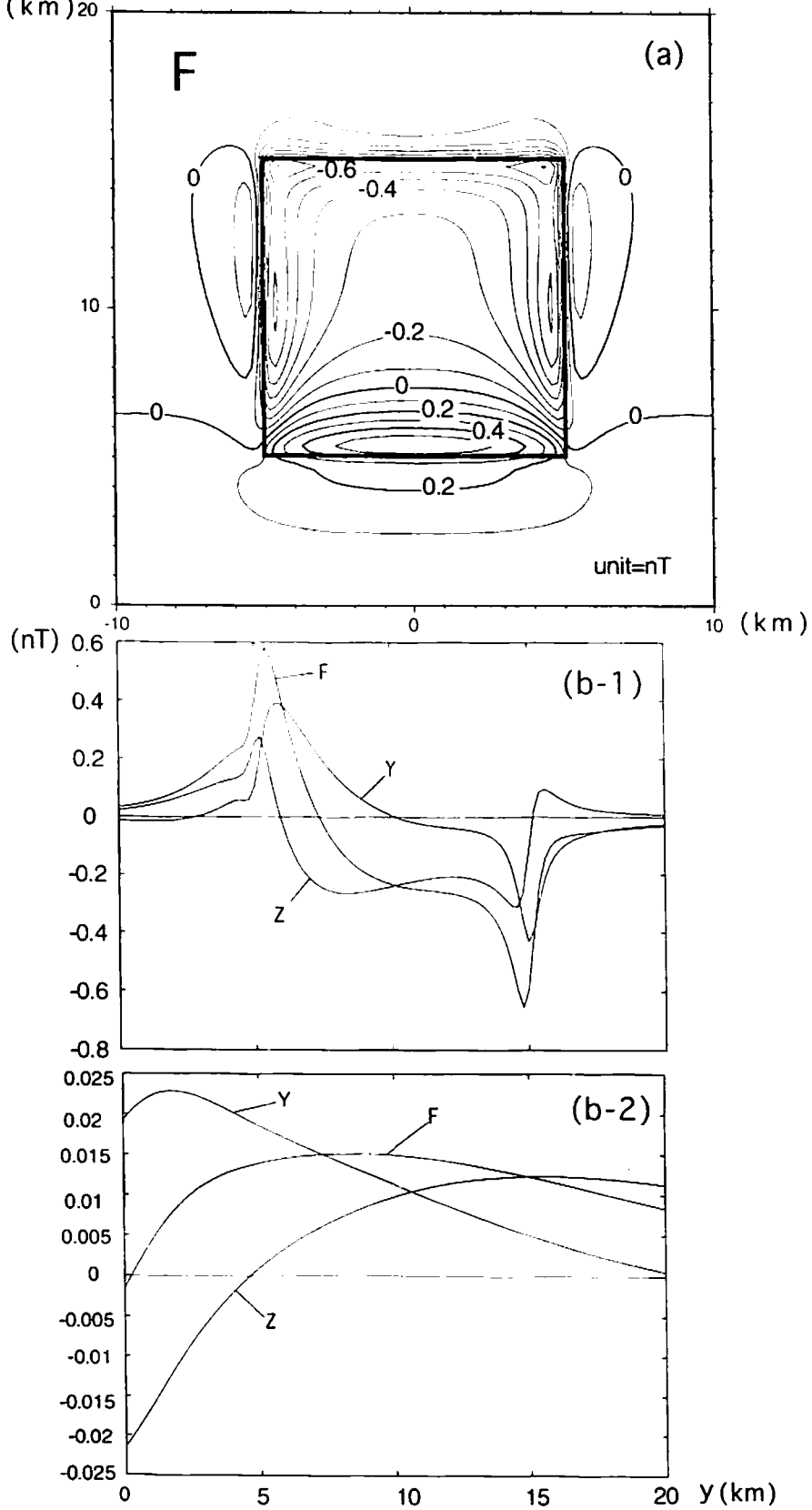
Fault length	10	km	Rigidity	3.5×10^{11}	cgs
Fault width	5	km	Poisson's ratio	0.25	
Fault depth	0.5	km	Stress sensitivity	1.0×10^{-4}	bar ⁻¹
Dislocation	1	m	Curie depth	15	km



第3図 地磁気変化の計算に用いた地殻モデル

$10 \times 10 \times 14.5$ kmのブロック状の領域のみが1 A/mに帯磁しておりそれ以外は無帯磁であるとする。ここで、図の位置に垂直なdip型の断層を考える。

第4図 ブロック状の磁化不均質構造を仮定した場合の地磁気変化
(km)20



参考文献

森正武 ,1980: 計算機による数値積分法. 日本コンピュータ協会

Byrd,P. F.,M. D. Friedman ,1954: Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer.

Okada,Y .,1992: Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space, *Bull. Seism. Soc. Am.*,**82**,1018-1040.

Oshiman,N .,1990: Enhancement of tectonomagnetic change due to non-uniform magnetization in the Earth's crust -two dimensional case studies, *J. Geomag. Geoelectr.*,**42**,607-619.