

グローバルな 3 次元電磁誘導のモデリング

- 修正ノイマン級数を用いた IDM -

小山 崇夫、歌田 久司 (東京大学 地震研究所)

Induction modelling in the 3D global earth - Modified Neumann Series -
Takao KOYAMA and Hisashi UTADA (ERI, Univ. of Tokyo)

1 はじめに

地球内部を起源とする電磁場変動やマントル深部の電気伝導度構造など地球深部についての電磁気的な情報を得ることで地球内部の構造や現象に関する理解が一層深まることが期待される。ところで、地球を球体と見るようなグローバルな電磁気現象を扱う場合には、3次元不均質球体における電磁誘導の問題を解かなければならない。これまでの研究報告では、平面大地を考えた場合の 3D forward modelling のプログラムは開発されてきた (Mackie et al.[1993] など) が、球体の場合の 3D forward modelling のプログラムはあまり考案されていなかった。ここにきてようやく、複数の研究者によりプログラムが作成されている (Everett & Schultz [1996], 上嶋 & Schultz [1998] など)。

主な計算法としては、積分方程式法、有限要素法、有限差分法を基本としたものがあげられる。このうち、積分方程式法は、3D forward modelling ではもっとも一般的である。境界の形が複雑である場合は使えないが、層構造の中に不均質体があるといった単純な場合は計算時間も比較的少なくて済む。有限要素法と有限差分法は、電気伝導度の不均質の境界付近で電磁場は急激に変化するので、境界付近でのグリッドを細かくとらなくてはならず、不均質性が大きい場合には計算を行なうのが困難になる。また、単純な構造に対しても大きな行列を扱うため、メモリーと計算時間は多くかかる。ただ、逆に任意の構造や境界に対して扱えるという利点があるため、計算機の性能の向上とともに採用される傾向になると思われる。

本研究では、コントラストが大きい場合にも対応できるよう積分方程式法を用いた。積分方程式法を用いた計算理論としてはロシアのグループによって開発された Iterative Dissipative Method (IDM) がある。そこで、その理論にしたがって任意の電気伝導度分布を持つ球体 (地球) に対して電磁誘導問題を解くことができる 3D forward modeling のプログラムを作成した。

2 計算手法 (変形ノイマン級数を用いた IDM の成り立ち)

Iterative Dissipative Method は Faynberg, Zinger らによって開発された。もとの発端は、地表における海陸不均質の効果を調べる目的で考案された (Zinger et al.[1986])。そのために、地表に厚さゼロの不均質層をおくという薄層近似モデルを扱っており、球体の内部全体を扱う 3次元不均質構造には適用していなかった。その後、半無限地球において、薄層を複数おく multi thin-sheet model を考案した (Zinger et al.[1992]) が、3次元不均質球体は扱っていない。

この方法の特徴は、1次元構造の電場のグリーン関数 Q^E を伴う積分演算子 q^E と不均質性を表す演算子 Z を用いることで、3次元不均質構造における電場を級数の形で表すものである。

$$E = E_0 + q^E Z E_0 + (q^E Z)^2 E_0 + \cdots \quad (2.1)$$

E_0 は平均的な 1 次元構造に関する電場で既知の量である。この級数のことをノイマン級数という。この級数には不均質性のあるところのみに関わるため、不均質構造が単純な場合には計算時間やメモリーが少なく済むというメリットがある。

しかし、この級数が問題によっては、必ず収束するかどうかは確認されていない。特に、不均質性が激しい場合には、級数は発散してしまう。本来、顕著な不均質構造による影響を探るのが目的であるのに、そのようなケースの計算が行なえないのは不本意である。そこで、IDM を改良する研究が行なわれた。

そして、Pankratov らにより、この級数が必ず収束するように変形させた変形ノイマン級数が考案された (Pankratov et al.[1995])。これは、球体内部の電磁場エネルギーが球外に洩れ出すため、球内のエネルギーは減少していくという性質を使ったものである。ただ、厳密な物理的解釈は難しく、今のところ数式の上で収束が確認され、理解されている段階である。まず、求めるべき電磁場を平均的な 1 次元構造での電磁場である normal field と不均質性による電磁場である anomalous field とに分けて計算を行なう。後者の anomalous field をこの手法のキーポイントである変形ノイマン級数で表す。この級数は必ず収束するので、anomalous field が求まり、先の normal field と足し合わせれば、望んでいた電磁場が求まることになる。彼らは、この理論を基に、半無限地球における電磁場を求める計算プログラムを作成した (Avdeev et al.[1997])。

この計算手法を用いると、先に述べたように電気伝導度の大きな不均質性がある場合においても電磁場が計算できるという特徴の他に、周波数依存性 (分散性) による複素電気伝導度、さらに電気伝導度の異方性 (anisotropy) を考慮する場合への拡張も比較的容易に行なえる (Pankratov et al.[1997]) という利点も合わせ持つ。

3 計算手順 (アルゴリズム)

本研究では、変形ノイマン級数を用いた Iterative Dissipative Method (Pankratov et al.[1995]) を用いて、3 次元不均質球体 (地球) における電磁誘導問題を解くプログラムを作成した。

まず、プログラムの簡単な流れを書くと次のようになる。表記は Pankratov et al.[1995] に従う。

1. 周波数を決める。
2. 不均質層内をグリッドで区切る。
3. 電気伝導度分布を入力する。
4. 球関数の最大次数 N を決める。
5. 1 次元球殻成層構造での電場および磁場のグリーン関数 Q^E, Q^H を求める。ただし、グリーン関数は球関数で表されるので、打ち切り次数 N までの級数の形で表す。
6. 電流ソース分布を入力する。
7. normal field E^n, H^n を求める。それに付随して、anomalous field に対する source である j_1^{ext} も求める。
8. anomalous field を級数の形で表し、収束するまで繰り返し計算をする。収束条件はあらかじめ決めておく。
9. normal field と anomalous field を足し合わせて、電磁場の計算が完了する。

この流れの中で、もっとも重要で、かつ、複雑であるのが、電気伝導度分布・電流ソース分布のおき方と積分演算子 q^E, q^H を伴った計算である。ここでは、 q^E と q^H の演算は本質的に同じなので、 q^E (1次元のグリーン関数 Q^E を伴う積分演算子) の演算について詳しく述べることにする。

まずは電気伝導度構造の入力の方法について述べる。

- 球体地球を球殻構造にした後、横方向に不均質性がある球殻層のみを緯線・経線で区切り、グリッドを作る。不均質層内以外はグリッドに区切る必要がないというのがこの手法のメリットである。このため、計算時間とメモリーを節約できる。
- それぞれのグリッドに対して、電気伝導度の値を入力する。つまり、1つのグリッド内では電気伝導度は一定である。

次に電流ソース分布の入力の方法 (および電場と磁場) について述べる。

- 先ほどのグリッドに対して、それぞれ電流ソースの値を入力する。つまり、1つのグリッドにつき一つの電流ベクトルを決めることになる。もちろん、グリッド内で電流分布を与えたいのは山々であるが、メモリーの制限上いたしかたないし、いくら区切っても切りがなくなってしまう。このベクトルはグリッド内の代表の電流ベクトルであり、その位置はグリッドの中心点での値と決める。
- なお、初期値としての電流ソースは球関数 (つまり、滑らかな分布) で与えることができるように工夫した。ただ、anomalous field を計算する際の2次的なソースについては、不均質な電気伝導度の分布が効き、低次で展開できないため、上記のような電流分布の決め方を採用している。2次的なソースは不均質層内のみに存在するため、あらためて他の層をグリッドに区切る必要はない。
- それに従い、電場と磁場に関してもグリッドの中心点での値のみを計算する。均質な層内はグリッドがないので、電場と磁場は球関数の係数で表す。電場または磁場の値を得たい時は、分布に焼き直せば良い。

演算 q^E について述べる。 q^E はグリーン関数に関する積分演算子であるので、積分をすることになるが、ここで先ほどグリッドにしたことが関わってくる。

簡単のために「あるグリッド $G1$ (体積 V_{G1}) の中心点 r_{G1} で電流ソースベクトル $j(r_{G1})$ が与えられている時に、ある別のグリッド $G2$ の中心点 r_{G2} における電磁場を求める」という設定を考えることにする。

- 本来ならば、

$$\begin{aligned} E(r_{G2}) &= q^E(r_{G2}, r) j(r) \\ &= \int_{G1} Q^E(r_{G2}, r) j(r) dV \end{aligned} \quad (3.1)$$

を計算することになる。

- その代わりに、代表値を使って、

$$\begin{aligned} E(r_{G2}) &= \int_{G1} Q^E(r_{G2}, r) j(r) dV \\ &\approx \int_{G1} Q^E(r_{G2}, r_{G1}) j(r_{G1}) dV \\ &= [Q^E(r_{G2}, r_{G1}) j(r_{G1})] \cdot V_{G1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

を計算することになる。この計算は厳密には無限小のグリッドでしか成り立たないが、グリッド内で場があまり変化しない場合には、良い近似である。グリッドのスケールが skin depth よりも十分小さければこの近似は成り立つと考えることができる。 Q^E はベクトル r_{G1} と r_{G2} とに関連した 3×3 のテンソルとなる。

また、このプログラムを使って、電磁場を計算したいという場合、通常は地表での値を求めることが多い。しかし、上記したように、普通にグリッドを区切ってしまったのでは、グリッドの中心での値しかわからず、地表での値が求まらない。そこで、一番上の地表のグリッドは厚さをゼロにした。このようにすれば、電磁場の値はグリッドの中心点での値だが、厚さがゼロなので、同時にそれは地表での値を計算したことになり、欲しいものが求まる。

4 他の計算法との比較

この計算法がどの程度正しいのか、これまでに他の方法で行なわれた単純な 3 次元不均質構造モデリングの計算結果と比較を行なう。

本研究 [THIS STUDY] との比較の対象は、以下の 2 つである。

1. IDM を用いた薄層モデリング (Kuvshinov et al.) [THIN SHEET]
2. 有限要素法を用いた 3D forward modeling (Everett & Schultz) [FEM]

前者は本研究で用いた IDM の開発者による計算法である。ただし、これは不均質のある領域を厚さゼロの層の中に閉じ込めてしまうという、近似計算法である。

後者は球体内部を 4 面体の要素で埋めつくし、有限要素法を適用した計算法である。

どのようなモデルについて行なったか、まず、入力である電磁場ソースと電気伝導度構造について述べる (Everett & Schultz[1996])。

電磁場ソースは地球外部に与え、球面上での磁場ポテンシャル分布を球関数 P_1^0 型であるとした。強さは外部磁場による地表での磁場変動の振幅が 100nT となるように正規化してある。周期は 1 日周期である。

電気伝導度構造は、図に示す (第 1 図)。1 次元構造に不均質な層を 1 つ加えたモデルである。不均質層は深さ 390 ~ 410 km の厚さ 20km のものとする。北半球側と南半球側で電気伝導度の値が異なる double-hemisphere という単純な不均質構造である。北半球側の電気伝導度を 2[S/m]、南半球側の電気伝導度 0.1[S/m] とする。なお比較対象の 1. (THIN SHEET) では有限の厚さの層を扱えないので、厚さゼロの不均質層を深さ 400km におき、北半球に $4 \times 10^4 S$ 、南半球に $2 \times 10^3 S$ の conductance をおいた。

このモデルでは、電磁場ソースも電気伝導度分布も経度方向に一樣であるため、計算される電磁場も経度方向には変化しない。そこで、ある子午線上での値を見て緯度方向の電磁場の様子を見ることにする。

なお、本計算法ではグリーン関数を計算する際に球関数を用いている。ここでは次数 8 までとって計算を行なったが、次数打ち切りによる誤差が生じた。そこで比較対象の 2 つの計算結果についても、球関数展開した後、その係数のうち次数 8 までを使って再び分布に焼き直したのを用いている。

計算結果として、磁場の南北成分を第 2 図に載せた。横軸は緯度、プラス側が北半球、マイナス側が南半球である。縦軸は磁場変動の振幅である。数%のずれが見られるものの、比較的良い

一致を示しているのがわかる。この計算法による結果は正しいとしてよいと考えられる。ずれの原因としては、先ほど述べた、球関数の次数打ちきりによる誤差がまだ残っている影響がもっとも大きいと思われる。このモデルのように不均質境界をはさんで急激に電気伝導度に変化する場合は、高次のモードも大きいため、低次で展開することができない。この計算法を使用する際には、このことを十分考慮しなければならない。

5 計算例 - 海陸不均質

ここで、数値計算の実行例として、外部起源磁場を入力した時に海陸不均質によって電場分布がどのような影響を受けるのかを見てみる。

地表より下では1次元モデルを用いている。海の電気伝導度としては $3[\text{S/m}]$ 、陸の電気伝導度としては $0.001[\text{S/m}]$ を入れた。地表から海面下8km(中心からの半径6370km)までの表層の平均的な電気伝導度分布を第3図に示す。

例として、 P_1^0 型の外部磁場変動を1年周期で入力する。磁場の強さは地表で 100nT とした。この時の、電場の東西成分を第4図に示す。今、次数は9までとってある。海陸不均質の影響で複雑なパターンをとることがわかる。このパターンに級数が収束するまでの指標の移り変わりを第5図に示す。これは表面のある1点での級数の項の大きさを繰り返しの回数を横軸にプロットしてある。1点での挙動を見ているので、1回ごとに大きさが小さくなるわけではないので、多少増減はするが、急激に減衰していく様子がわかる。

6 まとめ

本研究で作成した3次元不均質地球における電磁誘導の数値計算プログラムについて述べた。これの利点は主に

- 不均質領域(層)のみをグリッドに区切れば良く、メモリーを節約できる。
- 複雑な計算であるグリーン関数をはじめに1回計算すれば良いので、計算時間を節約できる。
- 任意の不均質構造に対して電磁場を計算することが原理的に可能である。

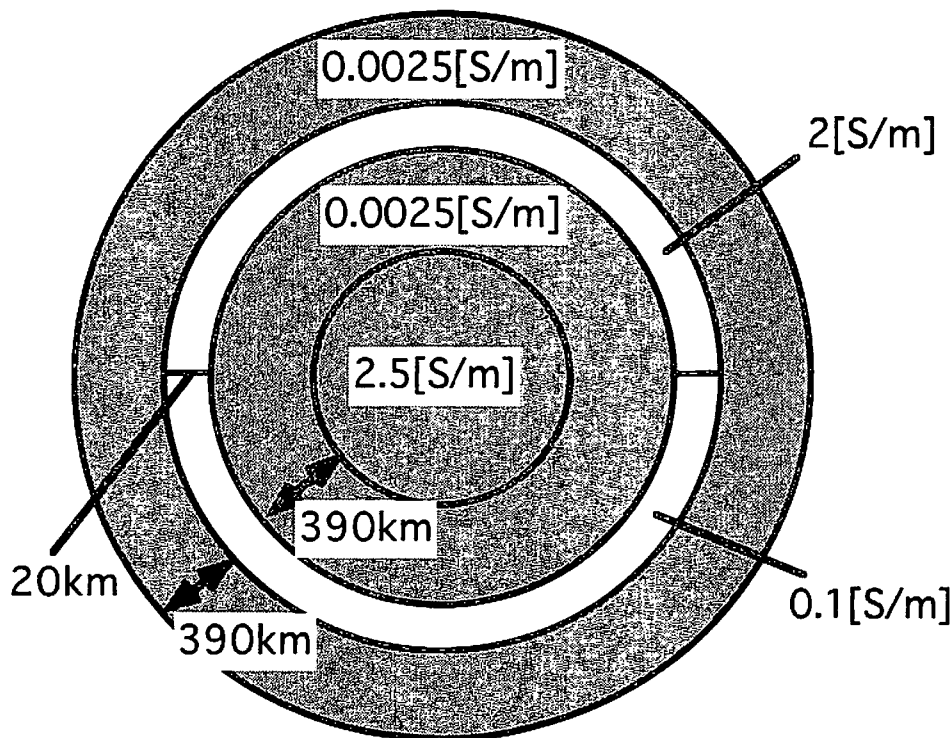
の3点である。

今後の課題としては、球関数を使うことによる次数の打ち切り誤差をいかに軽減させるかが大きな問題である。

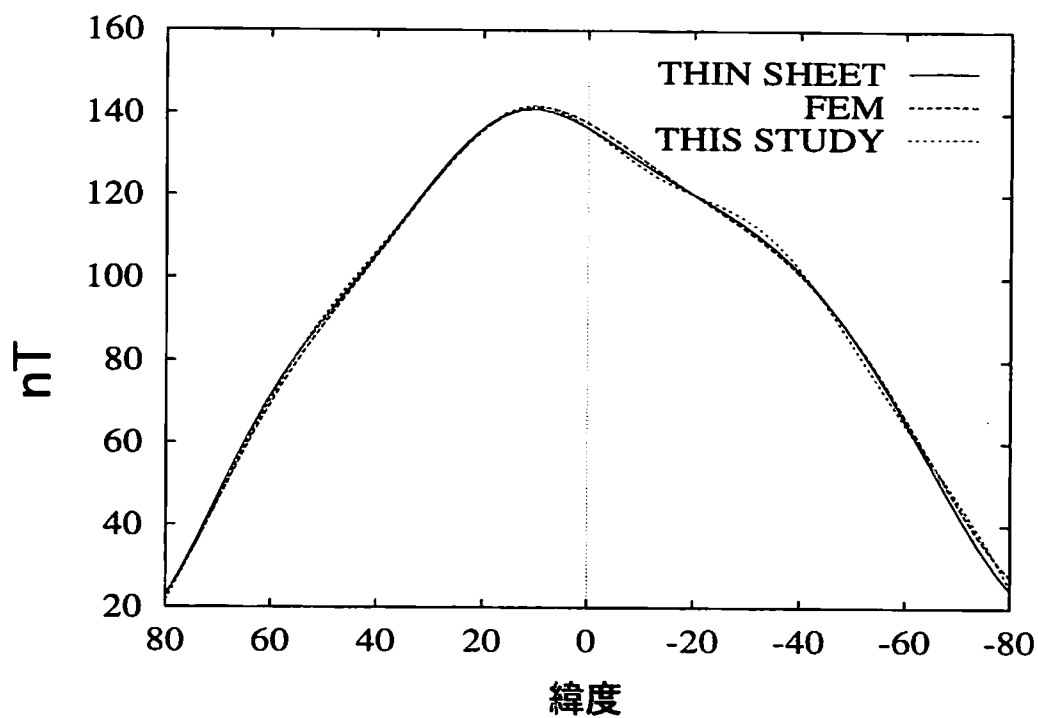
参考文献

- Avdeev, D.B., A.V. Kuvshinov, O.V. Pankratov, and G.A. Newman. High-Performance Three-Dimensional Electromagnetic Modelling Using Modified Neumann Series. Wide-Band Numerical Solution and Examples. *J.Geomag.Geolectr.*, Vol.49, pp.1519-1539, 1997.
- Everett, M. and A. Schultz. Geomagnetic induction in a heterogenous sphere : azimuthally symmetric test computations and the response of an undulating 660-km discontinuity. *Journal of Geophysical Research*, Vol.101, No.B2, pp.2765-2783, February 10 1996.

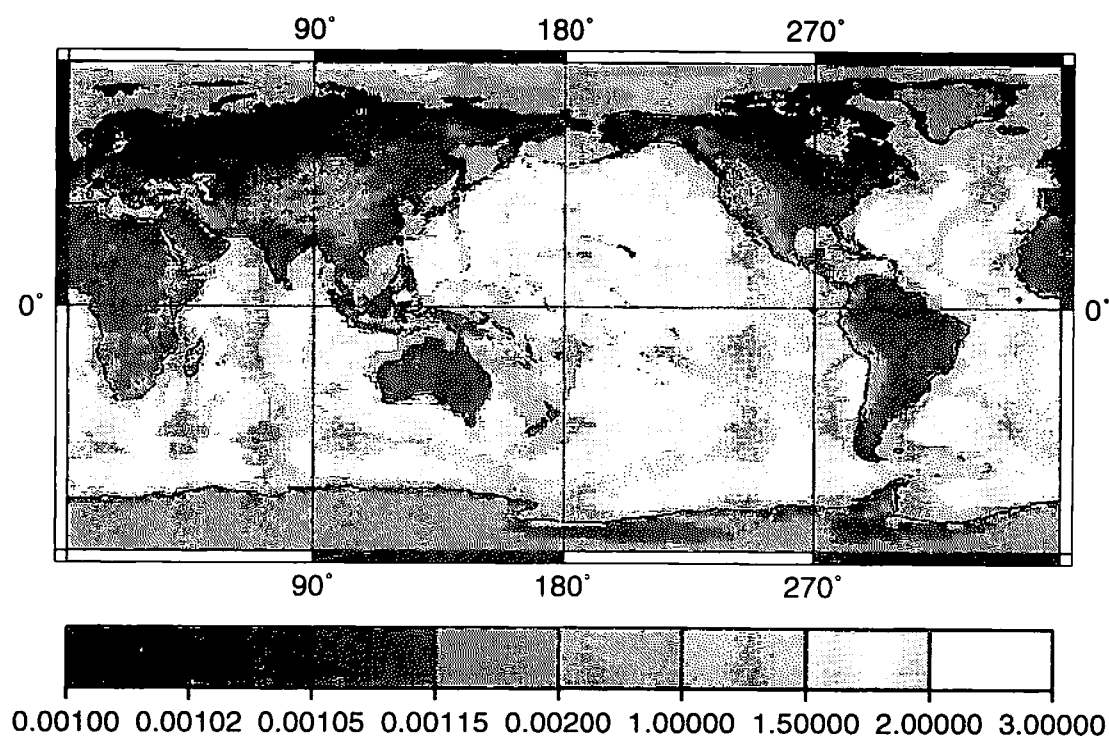
- Mackie, R.L., T.R. Madden, and P.E. Wannamaker. Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations - theory and comparisons to integral equation solutions. *Geophysics*, Vol.58, No.2, pp.215-226, February 1993.
- Pankratov, O.V., D.B. Avdeev, and A.V. Kuvshinov. Electromagnetic field scattering in a heterogeneous earth : a solution to the forward problem. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth* (English Translation), Vol.31, No.3, pp.201-209, October 1995.
- Pankratov, O.V., A.V. Kuvshinov, and D.B. Avdeev. High-Performance Three-Dimensional Electromagnetic Modelling Using Modified Neumann Series. Anisotropic Earth. *J.Geomag.Geoelectr.*, Vol.49, pp.1541-1547, 1997.
- 上嶋 誠, and A. Schultz. Staggered grid を用いた3次元球体電磁誘導問題の解法について. CA 研究会論文集, 1998.
- Zinger, B.S., A.V. Kuvshinov, and E.B. Faynberg. Electromagnetic induction in a spherical earth, containing oceans and continents, and in electrical contact with the underlying section : theory, method and an example. *Izvestiya, Earth Physics*, Vol.22, No.10, pp.818-828, 1986.
- Zinger, B.S., O.V. Pankratov, and A.B. Faynberg. Thin sheet modeling of surface and deep inhomogeneities. *Izvestiya, Earth Physics*, Vol.28, No.10, pp.896-906, 1992.



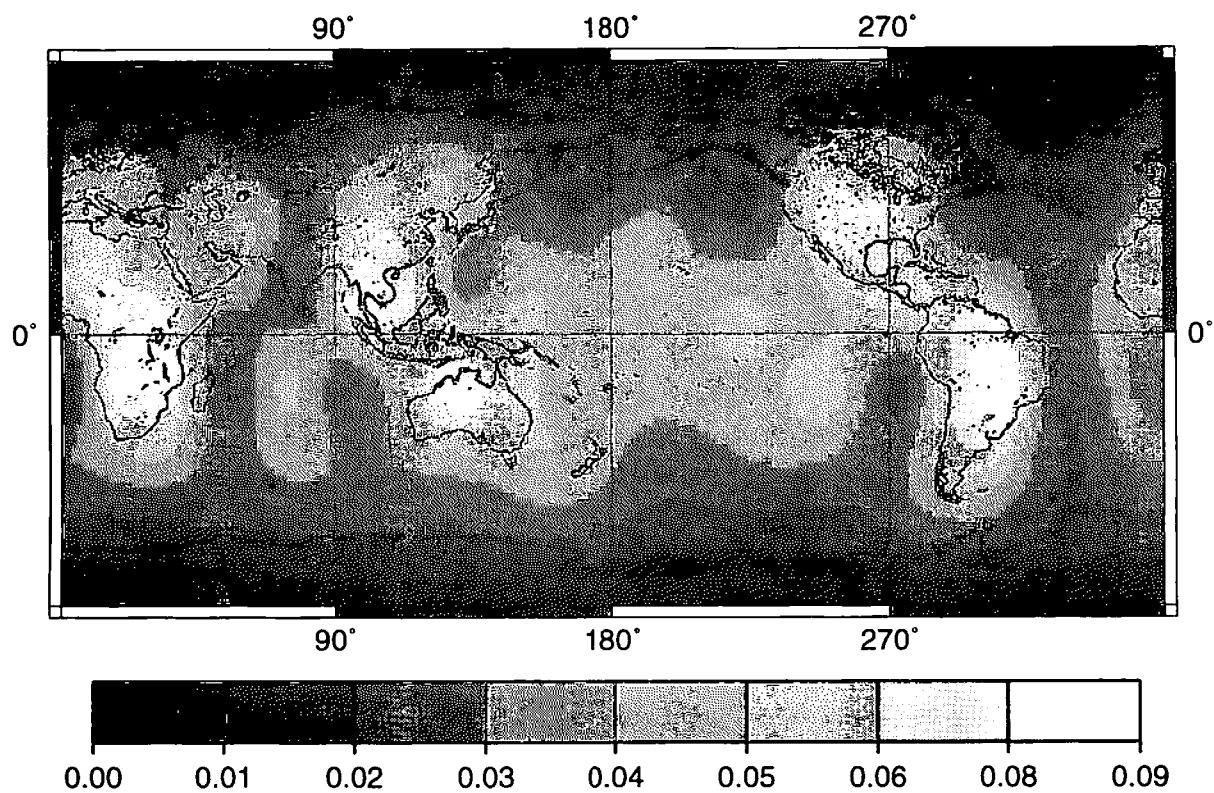
第1図 : double-hemisphere model [赤道面から見た図]



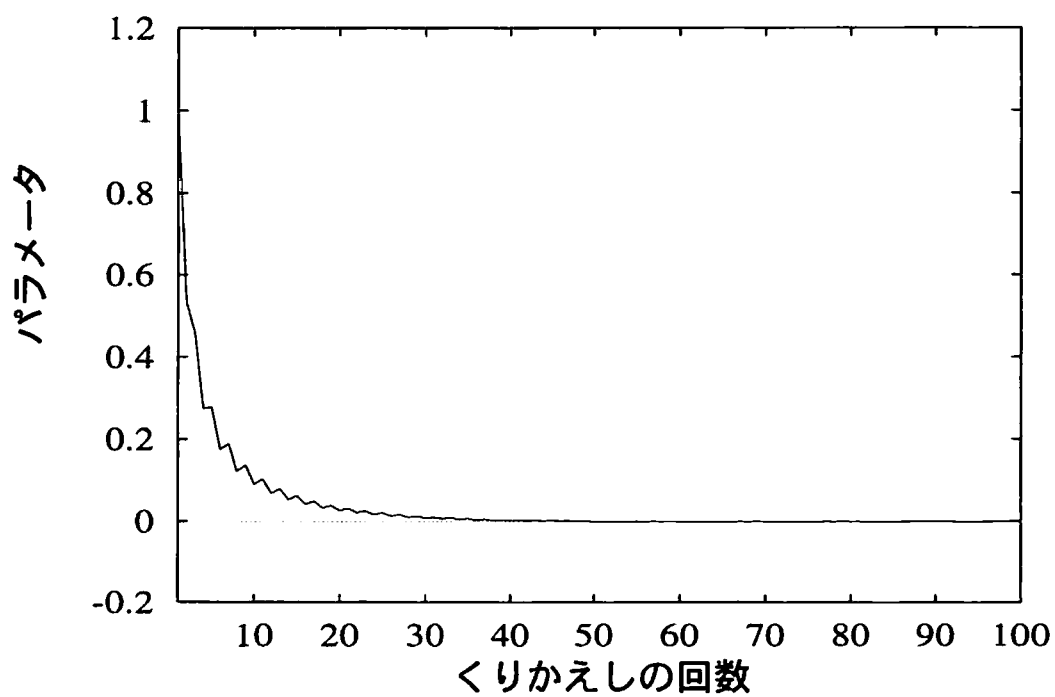
第2図：double-hemisphere での磁場の南北成分



第3図：海陸不均質による地表～海面下8kmの
平均的な電気伝導度 [S/m]



第4図：海陸不均質を入れた際の電場の東西成分 [mV/km]



第5図：収束をしめすパラメータの挙動