

# マントル電気伝導度の地球内部起源電磁場変動におよぼす影響

小山 崇夫、歌田 久司 (東大地震研)

The effects of the electrical conductivity of the mantle on the electro-magnetic variation of internal origin

Takao KOYAMA and Hisashi UTADA ( ERI , Univ. of Tokyo )

## 1 はじめに

地球電磁気学の大きな謎である「主磁場の成因」としてコア内でのダイナモ作用を考える説が最有力である。コアの内部でダイナモ作用が起こっていれば、適当な仮定の下に地表での電磁場の値をシミュレーションすることが可能であるので、もし地表における観測量からコア起源の電磁場変動を抽出できれば、コア内でのダイナモ作用を検証することも原理的に可能である。しかし、コアで生じた電磁場が地表に出てくるまでには、マントルという有限の電気伝導度を持つ領域が存在するので、地表での観測量を評価するためには、マントル電気伝導度の特性を知っていることが不可欠である。現時点では、この知識は、著しく欠如しており、ブラックボックスの状態である。そこで本研究では、まず、その特性を調べるために、コア-マントル境界(CMB: Core-Mantle Boundary)での周期的な電磁場変動が地表でどのように観測されるか、つまり input を CMB での磁場、output を地表での電磁場としたときの、マントルの周波数応答について、調べた。

しかし、目下のところマントルの電気伝導度分布は特定されていない。というのは、CMB まで(深さ 3000 km)のマントルの電気伝導度を地表の観測量から推定するためには、少なくとも周期 20 年以上のデータセットが必要であるといわれているからである。これまでにマントルの電気伝導度分布を推定するために使用されたデータというのはせいぜい数年程度で、20 年といった長周期データを利用した研究は報告されていない。本研究では、短周期のデータを使用してこれまでに求められてきたいくつかの 1D 電気伝導度モデルを用いて、それぞれのモデルによる周波数応答について詳しく調べ、比較検討した。

また、海底ケーブルを利用した電位差測定を念頭において、ポロイダル電場の強さを計算することで、コアのトロイダル磁場に関する情報が地表で検出可能かどうかについても検討した。

## 2 計算方法

本研究では、マントルの電気伝導度分布として、1D 球殻の構造をあらかじめ与えた上で、磁場・電場を計算する forward modeling を用いた。球殻内では、電気伝導度は一定とする。計算の方法は Banks(1969) の forward modeling を参考・応用した。

地球の中心に原点をとった球座標系を考える。 $(r = (r, \theta, \phi))$  また、周波数( $\omega$ ) 領域で考えるので、表記には上添字 $\omega$  をつけることにする。ある点 $r$  での周波数 $\omega$  の磁場を  $B^\omega(r)$

で表す。

$B^\omega(\mathbf{r})$  に対する induction equation は

$$i\omega B^\omega(\mathbf{r}) = -\nabla \times \eta(\nabla \times B^\omega(\mathbf{r})) \quad \eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma(r)}: \text{磁気拡散係数} \quad (1)$$

ここで、トロイダル・ポロイダル分解を行なう。トロイダル成分には下添字  $T$  を、ポロイダル成分には下添字  $P$  をつける。

$$\begin{aligned} B^\omega(\mathbf{r}) &\equiv B_T^\omega(\mathbf{r}) + B_P^\omega(\mathbf{r}) \\ &= \nabla \times (T^\omega(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (P^\omega(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2)$$

右辺第1項がトロイダル成分、第2項がポロイダル成分を表す。 $T^\omega(\mathbf{r}), P^\omega(\mathbf{r})$  はスカラー関数である。トロイダル成分は  $\mathbf{r}$  と直交する成分、つまり、水平成分しか持たない。ポロイダル成分は  $r$  方向の成分も持つ。1 D球殻の電気伝導度モデルを用いる場合、対称性から、トロイダル成分 ( $B_T^\omega$ ) とポロイダル成分 ( $B_P^\omega$ ) は induction equation、境界条件に関してそれぞれ独立に扱ってよいことが知られている。

ここでは、トロイダル成分を例にあげて説明をする。 $T^\omega(\mathbf{r})$  を球面調和展開する。

$$T^\omega(\mathbf{r}) = \sum_{n,m} t_n^\omega(r) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (3)$$

球座標  $(r, \theta, \phi)$  について、半径方向の成分を  $r$ 、余緯度を  $\theta$ 、経度を  $\phi$  と表記することにする。余緯度  $\theta = 0$  の方向を北に、経度  $\phi$  は地球の経度と同じ (eastward) にとる。induction equation に代入すると、 $t_n^\omega(r)$  に関する式は、球殻内では  $\sigma$  が一定としたので  $\sigma$  の空間微分がゼロであることを利用すると、

$$i\omega t_n^\omega(r) = \eta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} t_n^\omega(r) \quad (4)$$

となり、この式を解くと、

$$t_n^\omega(r) = \alpha_T j_n(kr) + \beta_T y_n(kr) \quad \text{ただし、}\alpha_T, \beta_T \text{ は定数、} k^2 = -\frac{i\omega}{\eta} \quad (5)$$

のように表される。ここで、 $j_n, y_n$  はそれぞれ第1種、第2種球ベッセル関数である。すなわち、未知の定数  $\alpha_T, \beta_T$  を境界条件から求める問題に帰着する。同様にポロイダル成分についても  $p_n^\omega = \alpha_P j_n(kr) + \beta_P y_n(kr)$  という式が導かれる。

層境界では、次のような磁場、電場、電流の連続条件を使って、接続すれば良い。(第1図参照)

- ・ 磁場:  $B_1^\omega(r_0) = B_2^\omega(r_0)$  (磁場3成分が連続)
- ・ 電場:  $E_{1H}^\omega(r_0) = E_{2H}^\omega(r_0)$  (電場の水平成分が連続)
- ・ 電流:  $\sigma_1 E_{1R}^\omega(r_0) = \sigma_2 E_{2R}^\omega(r_0)$  (電流の鉛直成分が連続)

この3つの条件から、

ポロイダル成分  $p_n^\omega(r_0)$  については、

$$p_{1n}^\omega(r_0) = p_{2n}^\omega(r_0) \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_{1n}^{\omega}(r_0)}{\partial r} = \frac{\partial p_{2n}^{\omega}(r_0)}{\partial r} \quad (7)$$

トロイダル成分  $t_n^{\omega}(r_0)$  については、

$$t_{1n}^{\omega}(r_0) = t_{2n}^{\omega}(r_0) \quad (8)$$

$$\eta_1 \frac{\partial(rt_{1n}^{\omega}(r_0))}{r_0 \partial r} = \eta_2 \frac{\partial(rt_{2n}^{\omega}(r_0))}{r_0 \partial r} \quad (9)$$

という境界条件になる。CMB で磁場の強さを与えれば、つまり、もっとも下の層での  $\alpha_T, \beta_T$  の値を与えれば、induction equation の解と境界条件より、地表での  $\alpha, \beta$  の値が求まり、地表での磁場が計算できる。

磁場の値を計算できれば、電場の値も計算できる。電場  $E^{\omega}(\mathbf{r}) = \eta \nabla \times B^{\omega}(\mathbf{r})$  より、ポロイダル磁場に関する電場は、

$$\eta \nabla \times (\nabla \times \nabla \times (P^{\omega}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r})) = \eta \nabla \times (\Delta P^{\omega}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}) \quad (10)$$

となり、トロイダル電場 ( $E_T^{\omega}(\mathbf{r})$ ) になる。トロイダル磁場に関する電場は、

$$\eta \nabla \times \nabla \times (T^{\omega}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}) \quad (11)$$

となり、ポロイダル電場 ( $E_P^{\omega}(\mathbf{r})$ ) になる。

以上のことをふまえると、CMB での磁場と地表での電磁場との間には以下の4つの関係がある。

CMB	地表
1. ポロイダル磁場	- ポロイダル磁場
2. ポロイダル磁場	- トロイダル電場
3. トロイダル磁場	- トロイダル磁場
4. トロイダル磁場	- ポロイダル電場

このうち3.の地表でのトロイダル磁場はゼロになる、つまり、観測されないことが知られているので、残りの3つについてこれから詳しく調べることにする。観測について見てみると、現在のところ1.のポロイダル磁場のみが観測されている(後述)のだが、4.のポロイダル電場は、観測不可能なトロイダル磁場に起因していることから、この電場の検出ができれば、コア内に関する情報が飛躍的に増大することが見込まれる。本研究ではこのポロイダル電場にもっとも重点をおいて調べてみた。

### 3 計算結果と考察

まず、今回用いた2種類の1D電気伝導度モデルについて説明をする。どちらも過去に提案されたモデルである。(第2図参照) 1つは Achache et al. (1981) で提案されたモデルで、もう1つは Banks (1969) で提案されたモデルである。Banks のモデルのほうが Achache のモデルと比べて、全体として1桁ぐらい電気伝導度の小さなモデルになってい

る。Banks のモデルを求める際には、100日周期程度のデータしか用いておらず、信頼のおける深さはたかだか1000 km までと考えられる。そのような意味からすれば、両方のモデルはある程度一致しているとみてよい。一方、Achache のモデルを求める際には、11年周期のデータを使っているため、深さ2000 km までは信頼できると考えられる。浅い部分で、たとえば深さ400 km まで、両者が一致しないのは、表層付近の不均質構造が効いているためと考えられる。本研究においては、どちらのモデルがより正確であるかを議論するのではなく、Achache のモデルを conductive なモデル、Banks のモデルを resistive なモデルと、2つの典型的なモデル例として扱い、両者の周波数応答の違いについて議論する。

第3図に地表でのポロイダル磁場( $B_S$ と表す、SはSurfaceの意)、トロイダル電場( $E_T$ )、ポロイダル電場( $E_P$ )を各々CMBでのポロイダル磁場( $B_P$ )、トロイダル磁場( $B_T$ )で規格化した計算結果を示した。電気伝導度のモデルとしては、Achacheのモデルを用いている。

まず、ポロイダル磁場については、インダクションの効果で短周期側では減衰が激しくほとんどゼロである。しかし、ある周期を境に立ち上がり、長周期側では一定値に収束するようになっている。(第3図上)一方、トロイダル電場については、短周期側ではやはり減衰が激しいのでほとんどゼロだが、ある周期を境に立ち上がり、長周期側ではふたたびゼロに収束する形になっている。(第3図中)長周期側では磁場の時間変動が小さいためインダクションの効果は無視でき、結果として、トロイダル電場はほとんどゼロになってしまう。ポロイダル電場については、ポロイダル磁場と同じ傾向を示すのがわかる。(第3図下)トロイダル電場と違って、長周期側でゼロに収束しない理由は、ポロイダル電場の方はトロイダル磁場によってできた電流を source とするものなので、静電磁場でも存在するからである。本研究では先述のように、このポロイダル電場に焦点を絞る。また、どの図においても球面調和関数の次数が大きくなると、電磁場の強さは小さくなるのがわかる。これ以降は、次数  $n = 1$  のみを見ていく。

2つのモデルを用いた計算結果を比較する。第4図はポロイダル磁場( $B_S$ )、ポロイダル電場( $E_P$ )について計算したものである。どちらの図においても、Banksのモデルの方が立ち上がりの周期が小さく、ポロイダル電場については、電場の強さはBanksのモデルのほうが大きい。この理由としては、resistiveなほうがinductionが起りにくく、減衰を受けにくいので、周期が小さくても地表に電磁場が出てくる。電場に関していうと、強さも大きい。また、ポロイダル磁場とポロイダル電場とを比較すると、立ち上がりの周期が、若干ではあるが、ポロイダル電場の方が小さい。ということは、もしポロイダル電場の強さが観測できるほどの大きさであった場合、ポロイダル磁場よりも情報量を多く持っていることを意味している。磁場の観測点と同じ程度に、またはそれ以上に電場(電位差)の観測点を増やすべきであり、このことは電場観測の重要性を示唆している。電場の強さの見積もりについては、後で述べる。

次に、現在のところ電気伝導度の情報のほとんどないマントル深部の電気伝導度の影響について考察する。先述のように、Achacheのモデルは深さ約2000 km までは見積もられていると考えられる。しかし、それよりも深い3000 km までについては、一応の計算結果は示されているものの、信頼性に乏しい。そこで本研究では、マントル上部2000 km の部分はAchacheのモデルをそのまま固定して用い、深さ2000~3000 km

の部分を変化させて計算を行なった。変化させる1000 kmを厚さ500 kmの2つの層にわけ、各々別々に、Achacheのモデルの電気伝導度の値を10倍または1/10倍してみ、地表で観測される電磁場がどのように違ってくるのかを調べた。2つの層のうち、上側の層を「上層」、下側の層を「下層」とよぶことにする。ここでも、ポロイダルな磁場・電場についての計算結果のみを示した。(第5図)

ポロイダル磁場はAchacheのモデルのまま求めた磁場の強さに対して、上層を変えた時の方が下層を変えた時よりも、離れた曲線となっている。つまり、ポロイダル磁場はCMBの直上の層よりも少し上にある層の方が磁場の強さに対する感度が良いということがわかる。一方、ポロイダル電場の方は、下層の方が上層よりも感度がよいことがわかる。ポロイダル電場の強さについて検証するには、より深部のマンツルの電気伝導度構造についての知識をうるということが非常に重要であることがわかる。

最後に、ポロイダル電場の検出可能性を調べるために、2地点間の電位差を計算した。東大地震研では、海底ケーブルを利用した電位差測定を行なっている。今回はそのうちのグアム-二宮測線の電位差測定を念頭におき、ポロイダル電場によるグアム-二宮間の電位差をAchacheおよびBanksのモデルを用いて各々で計算し、比較した。(第1表参照)計算は、以下の手順で行なった。Yokoyama & Yukutake (1991)によると、周期30年、振幅100 nTの球面調和関数の次数1に対応する内部起源磁場(つまり、ポロイダル磁場( $B_S$ ))が地表で観測されている。この値を使うと、CMBでのポロイダル磁場( $B_P$ )の大きさが計算できる。トロイダル磁場( $B_T$ )は、ポロイダル磁場( $B_P$ )とは独立な成分であるため、強さについては何の情報も得られない。そこで、静磁場の場合について報告がなされている値を用いて、仮にCMBでの変動の振幅が $B_T \approx 100B_P$ であるとしてCMBでのトロイダル磁場( $B_T$ )の大きさを決めることで、地表でのポロイダル電場( $E_P$ )の値を計算した。結果は、Achacheのモデルでは0.4 V、Banksのモデルでは8 Vという値になった。Achacheのモデルを採用した場合、検出するには適当な値となり、 $\frac{B_T}{B_P} \approx 100$ 程度であると検出可能ということがわかる。Banksのモデルを採用した場合、 $\frac{B_T}{B_P} \approx 100$ だと電位差の値が大きくなり過ぎてしまうので、 $B_T$ はもっと小さな値であるという制限を加えることができる。逆に、Banksのモデルは幾分resistive過ぎるということも考えられる。このように、トロイダル磁場の強さとマンツルの電気伝導度分布とはtrade-offの関係ではあるが、どちらかに制限を加えることができるという点でも、ポロイダル電場を測定することは非常に重要である。

## 4 まとめ

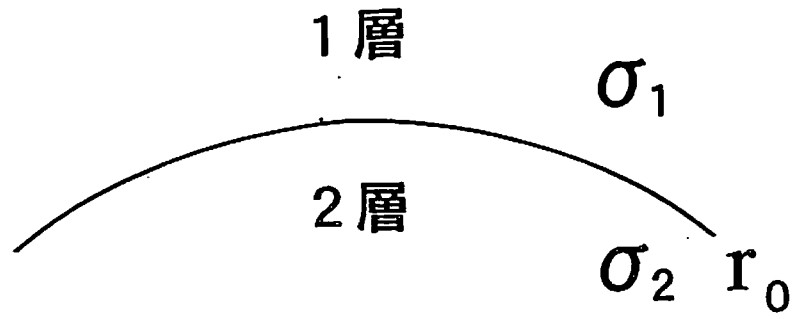
以下に、特にポロイダル電場に主眼をおいて、結果をまとめる。

- ポロイダル磁場、ポロイダル電場の立ち上がりの周期は、マンツルの電気伝導度が小さいほど、短周期になる。
- ポロイダル電場の強さは、マンツルの電気伝導度が小さいほど強い。

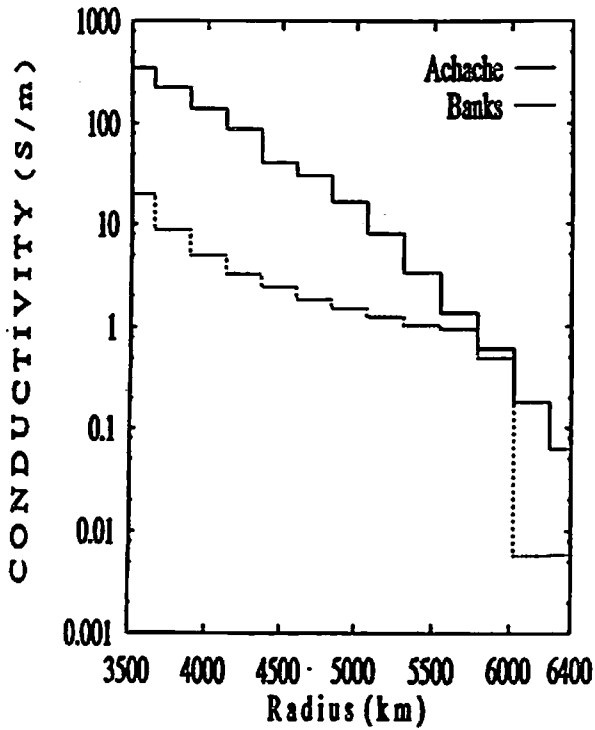
- ポロイダル磁場とポロイダル電場の立ち上がりの周期を比較すると、ポロイダル電場の方が、若干ではあるが、短周期側になる。
- ポロイダル電場の強さは、CMB 直上の電気伝導度の値に大きく依存する。
- CMB での変動の振幅比が  $\frac{B_T}{B_P} \approx 100$  であると、仮定した場合、
  - Achache のモデルは、ポロイダル電場の検出には適当なモデルである。
  - Banks のモデルの場合、ポロイダル電場の値は大き過ぎる。裏返しの関係を述べると、Banks のモデルは resistive 過ぎる。

## 参考文献

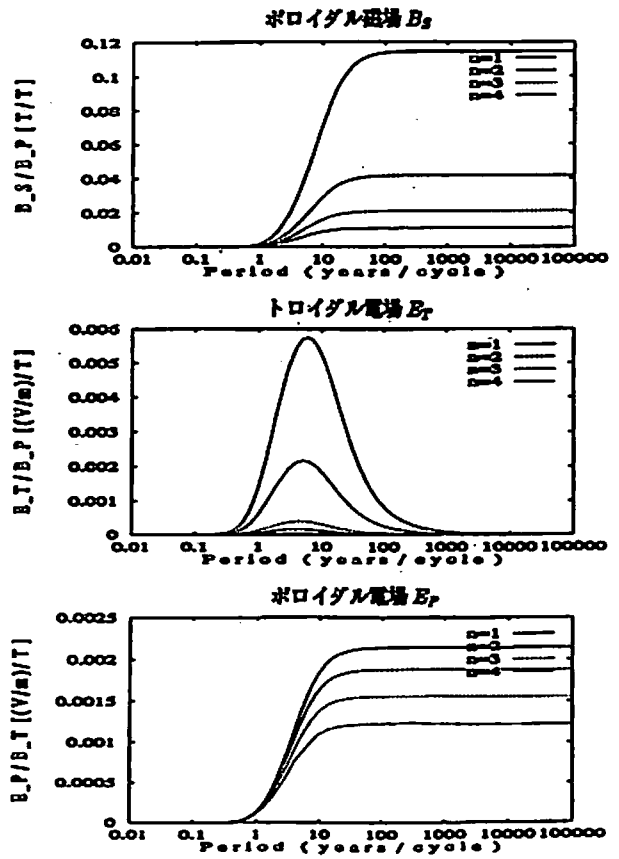
- Achache, J., J. L. Le Mouél & V. Courtillot, 1981. Long-period geomagnetic variations and mantle conductivity : an inversion using Bailey's method, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **65**, 579-601
- Banks, R. J., 1969. Geomagnetic variations and the electrical conductivity of the upper mantle, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **17**, 457-487
- Yokoyama, Y. & T. Yukutake, 1991. Sixty Year Variation in a Time Series of the Geomagnetic Gauss Coefficients between 1910 and 1983, *J. Geomag. Geoelectr.*, **43**, 563-584



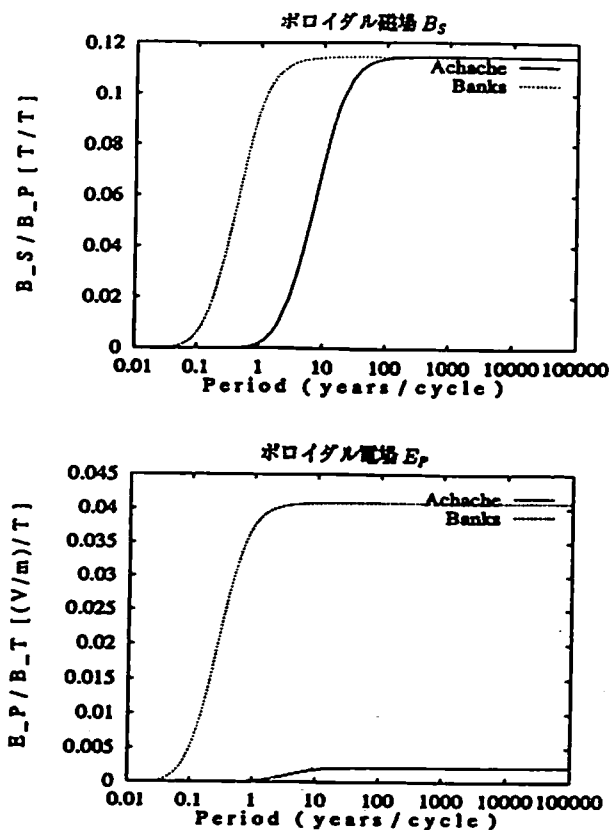
第1図：層境界付近の模式図。 $r_0$ は地球の中心と境界面との距離。



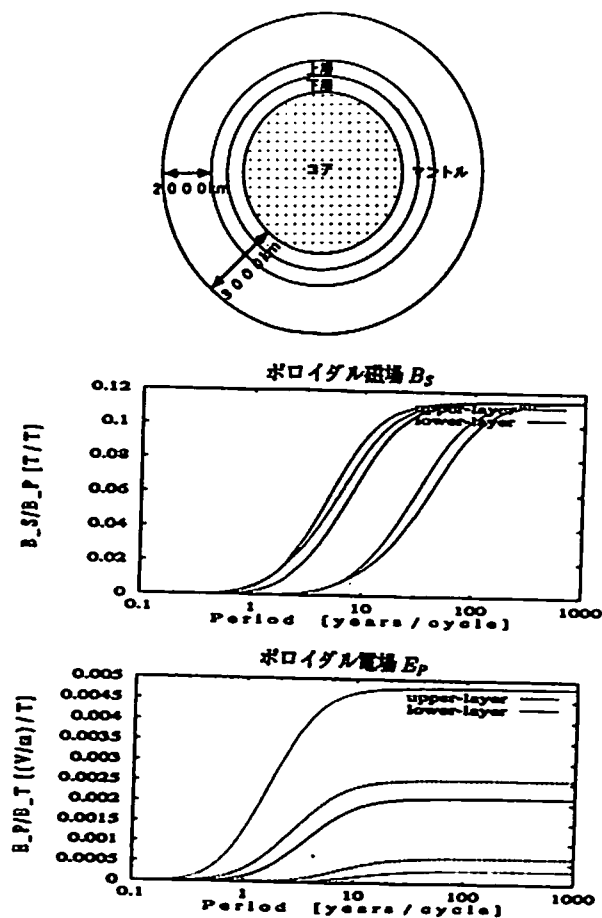
第2図：マンツルの電気伝導度モデル。  
実線が Achache、点線が Banks のモデル。



第3図：上図はポロイダル磁場  $B_S$ 、中図はトロイダル電場  $E_T$ 、下図はポロイダル電場  $E_P$ 。図中の数字は球面調和関数の次数  $n$ 。



第4図：上図はポロイダル磁場  $B_S$ 、下図はポロイダル電場  $E_P$ 。実線が Achache、点線が Banks のモデル。



第5図：上図はポロイダル磁場  $B_S$ 、下図はポロイダル電場  $E_P$ 。実線は、Achache のモデル。破線は「上層」を、点線は「下層」を変化させたもの。実線よりも上側がそれぞれの層について1/10倍したもので、下側が10倍したもの。

	Achache	Banks
周期 30 年、振幅 $100nT$ の磁場 $B_S$ を観測		
CMB でのポロイダル磁場 $B_P$ を計算	$940nT$	$870nT$
CMB において $B_T \approx 100B_P$ と仮定		
地表でのポロイダル電場 $E_P$ を計算	$0.20mV/km$	$3.57mV/km$
グアム～二宮間の電位差変動を計算	$0.4V$	$8V$

第1表：グアム～二宮間の電位差変動の計算結果。