

軸対称なポテンシャル問題を解くためのリップシッツ・ハンケル積分
Integrals of Lipschitz-Hankel Type for Solving Potential Problems
with Axial Symmetry

東京大学 地震研究所
Earthquake Research Institute,
The University of Tokyo

笹井洋一
Yoichi SASAI

1. はじめに

かつてそうであったように、CA研究会の活動に勉強会の側面もあってよい、と思う。そこで本稿では、地球物理学で出会うかなり広範囲な問題を扱う上で、有効な数学的道具を紹介したい。もっとも、リップシッツ・ハンケル(Lipschitz-Hankel)積分については、すでに多くの方がご存じと思う。以下ではこれをL-H積分と略記する。この解説はこの関数になじみの薄い学生諸君の参考になれば、と希望している。

L-H積分については、EASON et al. (1955)による体系的な研究がある。彼らの論文はL-H積分を完全楕円積分で表現するための一般的方法を展開した部分(Part I)と、 l, m, n が0, 1, または-1である低次数のL-H積分についての数値表(Part II)から成っている。つまり手回し計算機時代の数値計算を想定した労作なのである。我々は今日、数値表のかわりに、コンパクトなサブルーチン・プログラムを利用できる。そこでこの解説では、EASON et al. (1955)に書いてないこと—すなわちL-H積分はどんな問題に伴って出現するのかという発見的な導入と、L-H積分を用いる利点—について述べる。

一様な円盤の作る重力場が初等関数で表せないばかりか、その導出もけっこう難解である(例えばSINGH (1977)を見よ)のに、おどろいた人も多いであろう。一様磁化した円盤や円柱の磁気ポテンシャル、そして円錐台の作る磁場についての力武公式もしかり。あるいは一様な薄層導体に異なる電気伝導度を持つ円形領域がある時、薄層に流れる一様電流の乱れはごく簡単な式で与えられるのに、その作る磁場はもはや初等関数では表せない(ASHOUR and CHAPMAN, 1965)。これらの解は全て、リップシッツ・ハンケル積分と呼ばれる次の形の関数で表すことが出来る:

$$I(m, n; l) = \int_0^{\infty} J_m(at) J_n(bt) e^{-ct} t^l dt \quad (c > 0) \quad (1)$$

a, b, c が考えているモデルのパラメータに相当し、 $I(m, n; l)$ を (a, b, c) の関数とみなす。

最初に、一様な密度の円盤の引力ポテンシャルを3つの異なる方法で求め、その解が結局、(1)の形になることを示す。かなり異なったアプローチが全て同じ結果をもたらすことがわかり、またL-H積分はその過程で自然に導入される。次いで、いわゆるポテンシャル型の積分をL-H積分に帰着させる手続きを説明する。

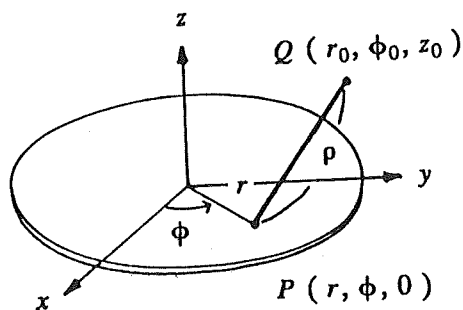
次にL-H積分を完全楕円積分で表現する。これはEASON et al. (1955)に展開されているので、詳しくは述べない。L-H積分を数値的に求めるのに不可欠な、第一種と第二種の完全楕円積分およびHeumannのラムダ関数(第三種の"完全"楕円積分に対応する)を計算する便利なサブルーチンを、補遺にかかげておく。(1)式において a または b がゼロである場合、L-H積分は b または a と c との無理関数で表される。この場合は、対称軸上の値を求めることに相当する。

L-H積分を含む関数を更に積分する場合がある。このような時には、L-H積分を完全楕円積分で表してし

まうと、解析的に積分を実行するのはまず不可能となる。ところがL-H積分の形のまま積分順序を交換して、ベッセル関数をその引数について積分すると、その結果が再びL-H積分で表せることが多い。L-H積分をパラメータ a または b についてテイラー展開したものに対しては、項別積分が許される。このように自在な数学的操作が可能なのは、L-H積分に含まれているベッセル関数が性質の良い解析関数であるからである。最後に、有名な円錐台についての力武公式(RIKITAKE, 1951)は、任意の回転対称な磁性体にも使えることを示す。

2. 一様な密度の円盤の作る重力

第1図のような、半径 a 、微小な厚さ Δz 、密度 σ_0 の一様な円盤を考え、これによる重力を求める。円盤を含む面に x - y 平面を取り、同じ面を r - ϕ 面とする円柱座標系を考える。この円盤の作る引力ポテンシャルを $V(r_0, \phi_0, z_0)$ と書く。 x - y 面が水平であるとすれば、点 $Q(r_0, \phi_0, z_0)$ における重力は $-\partial V / \partial z_0$ で与えられる。以下において、 V を3つの別々な方法で求めてみる。



第1図

(I) 直接積分する:

円盤上の質点を $P(r, \phi, z)$ 、観測点を $Q(r_0, \phi_0, z_0)$ として、 $\rho = PQ$ とおけば、ニュートン・ポテンシャルは次式で与えられる:

$$V = G\sigma_0 \iiint \frac{dv}{\rho} = G\sigma_0 \Delta z \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\rho} \quad (2)$$

ここで G は万有引力定数であり、かつ

$$\rho = \sqrt{R^2 + z_0^2} \quad (3)$$

$$R^2 = r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + r_0^2 \quad (4)$$

ところで次の関係が成り立つ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\rho} = 2 \int_0^\pi \frac{d\psi}{\rho_\psi} = 2\pi I(0, 0; 0) \quad (\psi = \phi - \phi_0) \quad (5)$$

ただし(1)の a, b, c の代わりに

$$a \rightarrow r, \quad b \rightarrow r_0, \quad c \rightarrow |z_0| \quad (6)$$

と置き換えるものとする。(5)の関係式を知っていると

$$V = 2\pi G\sigma_0 \Delta z \int_0^a I(0, 0; 0) r dr \quad (7)$$

(6)式からこの場合のL-H積分は

$$I(0, 0; 0) = \int_0^\infty J_0(rt) J_0(r_0 t) e^{-|z_0|t} dt \quad (8)$$

と書けるので、 V は r と t についての積分になっている。積分順序を交換して、先ず r について積分する

と

$$\int_0^a J_0(rt) r dr = \left[\frac{r}{t} J_1(rt) \right]_0^a = \frac{a}{t} J_1(at) \quad (9)$$

従って

$$V = \int_0^\infty J_1(at) J_0(r_0 t) \frac{e^{-|z_0|t}}{t} dt = 2\pi a G \sigma_0 \Delta z I(1, 0; -1) \quad (10)$$

ただしL-H積分のパラメータ a, b, c は

$$a \rightarrow a, \quad b \rightarrow r_0, \quad c \rightarrow |z_0| \quad (11)$$

と置き換える。

(II) たたみこみ積分と見なす：

(2)の積分を直角座標系で書き直してみると、

$$V(x_0, y_0, z_0) = G \sigma_0 \Delta z \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} \quad (12)$$

ただし、 Ω は半径 a の円盤を意味する。この積分は

$$\frac{1}{\rho_{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}} \quad (13)$$

という関数と

$$H(a-r) = \begin{cases} 1 & (a > r > 0) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (14)$$

という関数のたたみこみと見なすことが出来る。 $H(\)$ はヘビサイド関数である。

2次元関数 $f(x, y)$ が r のみの関数 $f(r)$ である時、 $f(x, y)$ の二重フーリエ変換は変数変換によって次のように書くことが出来る：

$$\begin{aligned} f^*(\alpha) = f^*(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \\ &= \int_0^\infty f(r) J_0(\alpha r) r dr \quad (\alpha = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \end{aligned} \quad (15)$$

$f_1 = 1/\rho_{z_0}$ を選ぶと

$$f_1^* = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} J_0(\alpha r) r dr = \frac{e^{-\alpha|z_0|}}{\alpha} \quad (16)$$

$f_2 = H(a-r)$ を選ぶと

$$f_2^* = \int_0^a H(a-r) J_0(\alpha r) r dr = \int_0^a J_0(\alpha r) r dr = \frac{a}{\alpha} J_1(a\alpha) \quad (17)$$

ここで更にたたみこみ積分 $h = f * g$ のフーリエ変換は $h^* = 2\pi f^* g^*$ で与えられることから

$$V^* = 2\pi G \sigma_0 \Delta z f_1^* f_2^* = 2\pi a G \sigma_0 \Delta z J_1(a\alpha) e^{-\alpha|z_0|} \alpha^{-2} \quad (18)$$

V^* に対してフーリエ逆変換 (=ハンケル変換) を施せば

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\infty V^*(\alpha) J_0(\alpha r_0) \alpha d\alpha = 2\pi a G \sigma_0 \Delta z \int_0^\infty J_1(a\alpha) J_0(r_0\alpha) \frac{e^{-\alpha|z_0|}}{\alpha} d\alpha \\ &= 2\pi a G \sigma_0 \Delta z I(1, 0; -1) \end{aligned} \quad (19)$$

これは(I)の方法による結果(10)と等しい。

(III) ポアソン方程式を積分変換で解く：

これはSINGH(1977)が与えた解法である。円盤の引力ポテンシャル V は次のポアソン方程式を満たす。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma_0 \Delta z \delta(z) H(a-r) \quad (20)$$

ここで $\delta(z)$ はデルタ関数である。 V を r についてハンケル変換し、 z についてフーリエ変換すると

$$V^*(\alpha, \zeta) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V(r, z) e^{i\zeta z} r J_0(\alpha r) dr dz \quad (21a)$$

また、その逆変換は

$$V(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V^*(\alpha, \zeta) e^{-i\zeta z} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha d\zeta \quad (21b)$$

(20)に対してこの変換を施すと

$$V^*(\alpha, \zeta) = 4\pi G\sigma_0 \Delta z a \frac{J_1(a\alpha)}{\alpha(\alpha^2 + \zeta^2)} \quad (22)$$

(22)を導くにはハンケル変換についての

$$H_0\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right\} V = -\alpha^2 H_0[V]$$

という性質を使う。 $H_0[\]$ は0次のハンケル変換の作用素を意味する。(22)に対して、(21b)で定義される逆変換を行うと

$$V = 2\pi a G\sigma_0 \Delta z \int_0^\infty J_1(a\alpha) J_0(r_0\alpha) e^{-\alpha|z|} \alpha^{-1} d\alpha \quad (23)$$

となって、これは既に得ている(10)と等しい。(23)を求める際には $1/(\zeta^2 + \alpha^2)$ のフーリエ変換が

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\zeta^2 + \alpha^2} e^{-i\zeta|z|} d\zeta = \frac{1}{2} \frac{e^{-\alpha|z|}}{\alpha}$$

であることを使っている。

(II)と(III)は第1図の問題に対するもっともエレガントな解き方であって、ポテンシャル、電磁場、弾性論、流体力学等の諸問題に広く応用できる。これらの解法においては、L-H積分がきわめて自然に導入される。これに反して(I)の解法では、物理的意味は明快だが、突如として(5)式が現れて、無理やりL-H積分に帰着させているように見える。そこで次節では、(5)式の由来を示すことにしよう。

3. ポテンシャル型積分からL-H積分へ

ポテンシャル型積分というのは、ニュートン・ポテンシャルそれ自体あるいはその微分で与えられるような作用場において、そのポテンシャル関数を源泉の分布全体について積分したものを言う。源泉が軸対称な分布をしている時、対称軸を一周する積分は次の形に表される：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^m \phi}{\rho^n} d\phi \quad (24a)$$

この積分を変形すると、結局

$$\int_0^\pi \frac{\cos^m \psi}{\{\rho_\psi\}^n} d\psi \quad (24b)$$

という積分を評価すればよいことが分かる。積分区間が $[0, 2\pi]$ から $[0, \pi]$ となったことに注意。ただし ρ_ψ は、第1図に戻って、動点を $P(a, \varphi, 0)$ 、観測点を $Q(b, \varphi_0, c)$ とした時の距離 PQ を表わし、

$$\rho_\psi = \sqrt{R^2 + c^2}, \quad R^2 = a^2 - 2ab\cos\psi + b^2, \quad \psi = \phi - \phi_0$$

である。

(24b)の積分のうち、最も簡単な形は $m = 0, n = 1$ の場合であって、前節の(5)式に現れた。そこで次の(5')式を導いてみよう：

$$\Phi_1 = \int_0^\pi \frac{1}{\rho_\psi} d\psi = \pi I(0, 0; 0) \quad (5')$$

まずリプシッツ(Lipschitz)の積分(WATSON, 1922)から出発する。

$$\int_0^\infty e^{-ct} J_0(Rt) dt = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2}} \quad (25)$$

(25)式を(5')の ρ_ψ に代入して、 t と ψ について積分順序を交換すると

$$\Phi_1 = \int_0^\infty e^{-ct} dt \int_0^\pi J_0(Rt) d\psi \quad (26)$$

ここでゲーゲンバウエル(Gegenbauer)の加法定理(WATSON, 1922)を利用する：

$$J_0(Rt) = J_0(at) J_0(bt) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(at) J_m(bt) \cos m\psi \quad (27)$$

上式の両辺を ψ について 0 から π まで積分すると

$$\int_0^\pi J_0(Rt) d\psi = \pi J_0(at) J_0(bt) \quad (28)$$

これを(27)に代入して

$$\Phi_1 = \pi \int_0^\infty J_0(at) J_0(bt) e^{-ct} dt = \pi I(0, 0; 0) \quad (29)$$

これで(5')式が証明された。

(24b)の被積分関数 $\cos m\psi$ において、 $m \neq 0$ の場合には、(27)に $\cos m\psi$ を掛けて 0 から π まで積分すればよい。一方、積分記号下でパラメータ c について微分することで、 l が高次な場合の関係式が得られる。例えば(29)を c で微分して

$$\int_0^\pi \frac{1}{\rho_\psi^3} d\psi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1}{\partial c} = \frac{\pi}{c} I(0, 0; 1) \quad (30)$$

を得る。以上に見てきたように、(29)と(30)を導いた過程が、 $I(n, n; l)$ というタイプのL-H積分に帰着させるやり方の原型をなしている。

それでは $m \neq n$ であるようなものは、何に由来するのだろうか？ベッセル関数を微分すると、より高次のベッセル関数になる(例えば、 $dJ_0/dz = -J_1$)。従ってそれらは $I(n, n; l)$ を、積分記号下で a または b について微分すると出て来る関数である。これとは逆に、ベッセル関数の漸化式を使って、高次の m, n を低次のものに引き下げることが出来る。EASON et al. (1955)には多数の漸化式が載っている。これらを利用すると、任意の高次のL-H積分は最終的には、 $m, n = 1$ 、または 0 ；

$l = 1, 0$ または -1 という関数の組合せで表現できる。

我々は(24)式で表される積分にしょっちゅうお目に掛かる。これらは全て、L-H積分に帰着できるのである。

4. L-H積分の完全楕円積分による表現

円盤が水平($x-y$ 面)に置かれていれば、重力は

$$g = - \frac{\partial V}{\partial z_0} = \pm 2\pi a G \sigma_0 I(1, 0; 0) \quad (31)$$

で与えられる。EASON et al. (1955)によれば、 $I(1, 0; 0)$ は次のように完全楕円積分を用いて表せる。

$$I(1, 0; 0) = \begin{cases} - \frac{kc}{4a\sqrt{ab}} F_0(k) - \frac{1}{2a} \Lambda_0(k, p) + \frac{1}{a} & (a > b) \\ - \frac{kc}{4a^2} F_0(k) + \frac{1}{2a} & (a = b) \\ - \frac{kc}{4a\sqrt{ab}} F_0(k) + \frac{1}{2a} \Lambda_0(k, p) & (a < b) \end{cases} \quad (32)$$

ここで

$$F_0(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} \quad (33)$$

$$\Lambda_0(k, p) = \frac{2}{\pi} (1-p)^{1/2} (1-k^2/p)^{1/2} \Pi(k, p), \quad \Pi(k, p) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1-p \sin^2 \psi) \Delta(\psi)} \quad (34)$$

かつ

$$\Delta(\psi) = (1-k^2 \sin^2 \psi)^{1/2}, \quad k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + c^2}, \quad p = \frac{4ab}{(a+b)^2} \quad (35)$$

である。この他に

$$E_0(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Delta(\psi) d\psi \quad (36)$$

が必要なL-H積分も多い。 $F_0(k)$, $E_0(k)$ は第一種および第二種の完全楕円積分に $2/\pi$ をかけたもの、 $\Pi(k, p)$ は第三種の(完全)楕円積分、そして $\Lambda(k, p) = \pi/2 \Lambda_0(k, p)$ はホイマン(Heuman)のラムダ関数と呼ばれる。

EASON et al. (1955)には、 $I(0, 0; 0)$, $I(1, 1; 0)$, $I(0, 0; 1)$, $I(1, 1; 1)$, $I(1, 0; -1)$, $I(1, 0; 0)$, $I(1, 0; 1)$, $I(1, 1; -1)$ という8種類のL-H積分を $F_0(k)$, $E_0(k)$, $\Lambda_0(k, p)$ で表した関係式が与えられている。これらの導出にはガウスの超幾何級数など、特殊関数についてかなり高度な知識が要求されている。このあたりは数学屋さんにかかせて、我々は結果だけ使わせてもらうことにすれば、さし当り $F_0(k)$, $E_0(k)$ および $\Lambda_0(k, p)$ の数値計算サブルーチンを持っていればよい。第一種と第二種の完全楕円積分についてはHASTINGS (1955)のミニ・マックス近似、ラムダ関数についてはNAGY (1965)の級数解があって、補遺に紹介しておいた。これはパソコンでも簡単に使える、コンパクトなプログラムである。

前節で述べたように、EASON et al. (1955)に挙げられている漸化関係を使えば、高次のL-H積分もこれら8種類の関数の組合せで表現できる。しかし数値計算上は、これらの漸化式をそのまま使うと、効率が悪

悪いこともある。そこで例えばSASAI (1991)は、 $m=n=2$ または3の場合について完全楕円積分表現を求めていて、こちらを用いた方が誤差も小さく、計算時間も早い。

円盤の重力場が完全楕円積分に帰着されることを、直接確かめてみよう。(2)式を微分すると、

$$g = G\sigma_0\Delta z \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \frac{z_0 d\phi}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad (37)$$

(37)式で r についての積分に着目すれば、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 - 2rr_0\cos(\phi - \phi_0) + r_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ &= \left[-\frac{-r_0r\cos(\phi - \phi_0) + r_0^2 + z_0^2}{r_0^2\sin^2(\phi - \phi_0) + z_0^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right]_0^a = I(\phi) \end{aligned} \quad (38)$$

つまり

$$g = G\sigma_0\Delta z z_0 \int_0^{2\pi} I(\phi) d\phi \quad (39)$$

$\phi - \phi_0 = 2\psi$ と変数変換すると、(39)式の被積分関数は(35)の第1式に出てきた $\Delta(\psi)$ の有理関数となるので、確かに完全楕円積分の一次結合で表すことが出来る。(39)式を変形して行くと、最終的には(32)式になるはずである。かなり面倒そうだが、とてもやる気は起きないが。

(32)式を見ても明かなように、EASON et al. (1955)が与えたL-H積分の完全楕円積分表示においては、分母に a または b がそのまま入っている。ところが a または b がゼロであっても、L-H積分の値は有限確定なので、数値的発散が起こるのは見掛けのものに過ぎない。L-H積分の定義を見れば、 $m, n \neq 0$ の時、 a または b がゼロならベッセル関数の値もゼロ、 $m, n = 0$ なら $J_0(0) = 1$ となって、L-H積分は通常のハンケル変換の形をとる。 $b=0$ の場合の主要L-H積分は次のようになる。

$$I(0, 0; 0) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad I(0, 0; 1) = \frac{c}{(a^2 + c^2)^{3/2}} \quad (40a)$$

$$I(1, 0; -1) = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{a}, \quad I(1, 0; 0) = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{a\sqrt{a^2 + c^2}} \quad (40b)$$

$$I(1, 0; 1) = \frac{a}{(a^2 + c^2)^{3/2}} \quad (40c)$$

$$I(1, 1; 0) = I(1, 1; 1) = I(1, 1; -1) = 0 \quad (40d)$$

第1図に戻ってみると、 $b=0$ の場合は z 軸上の値を求めることに相当している。更にポテンシャル積分の形(24b)を見ると、分母の ρ_{Ψ} が Ψ の関数でなくなり、かつ $m \neq 0$ であれば Ψ についての積分は当然ゼロになる、ことなどが理解されよう。

a や b がゼロに近づく時におこる数値不安定を避けるため、 b/a や k^2 についてテイラー展開した式を用意しておくといよい。 b/a の展開式についてはEASON et al. (1955)が論じている。一方、SASAI (1991)には、 k^2 についての展開式が与えられている。この級数展開の利点は、単に数値計算上の便宜に留まらない。 k^2 についてのマクローリン級数は一様収束する。従ってL-H積分を含む関数をそのパラメータ a, b について積分する場合に、テーラー展開した式を代入して項別に積分することが許される。実際、

SASAI (1991)は茂木モデルの点力源解に関して生じたパラドックスを解明するために、この性質を利用して解析を行った。この手法は特異点の周囲の場を解析する、様々な問題に有効であろう。

5. 軸対称な磁性体の作る磁場に関する(拡張)力式公式

RIKITAKE(1951)は一様磁化した円錐台の作る磁場を計算する式を与えた。ちなみにこの論文の主内容は、1951年伊豆大島の三原山噴火に際して、きわめて大きな地磁気伏角の変化が観測されたことを報告したものであり、火山電磁気学における記念碑的な論文である。さて原論文に従って、円錐台の作る磁場を求めてみよう。

磁気ポテンシャルは重力ポテンシャルを微分した関係にある。一様な密度 σ_0 の物体による重力ポテンシャルを V とすれば、同じ形をして一様に磁化した物体の作る磁気ポテンシャルは

$$W_k = - \frac{J_k}{G\sigma_0} \frac{\partial V}{\partial x_k} \quad (41)$$

で与えられる(ポアソンの関係と呼ぶ)。 J_k は磁化の x_k 成分である。我々は既に、一様な円盤の作る引力ポテンシャル(10)を知っている。いま、 z 軸に関して回転対称な物体があって、その断面の円の半径が $R(z)$ ($z_1 < z < z_2$) であるとしよう。このような物体の引力ポテンシャルが

$$V = 2\pi G\sigma_0 \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 0; -1) dz \quad (42)$$

で与えられることは明らかである。ただしL-H積分のパラメータは

$$a \rightarrow R(z), \quad b \rightarrow r_0, \quad c \rightarrow |z - z_0| \quad (43)$$

と置き換える。ここで地磁気の問題を扱う場合の慣例に従って、 z 軸を鉛直下方にとる。 z 軸をこのように定義しなおしても、軸対称物体の重力ポテンシャルの式(42)はそのまま成り立つ。ポアソンの関係から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi J_x} W_x &= - \frac{\partial}{\partial x_0} \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 0; -1) dz \\ &= \frac{x_0}{r_0} \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 1; 0) dz \end{aligned} \quad (44)$$

同様にして

$$\frac{1}{2\pi J_y} W_y = \frac{y_0}{r_0} \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 1; 0) dz \quad (45)$$

$$\frac{1}{2\pi J_z} W_z = \begin{cases} \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 0; 0) dz & (z_2 < z_0) \\ \int_{z_1}^{z_0} R(z) I(1, 0; 0) dz - \int_{z_0}^{z_2} R(z) I(1, 0; 0) dz & (z_1 < z_0 < z_2) \\ - \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 0; 0) dz & (z_0 < z_1) \end{cases} \quad (46)$$

これを微分することによって、帯磁の三成分の作る磁場の各成分は次の式で与えられる。

$$\frac{1}{2\pi J_x} X_x = \frac{x_0^2 - y_0^2}{r_0^2} F - \frac{x_0^2}{r_0^2} G \quad (47a)$$

$$\frac{1}{2\pi J_x} Y_x = \frac{2x_0 y_0}{r_0^2} \left(F - \frac{1}{2} G \right) \quad (47b)$$

$$\frac{1}{2\pi J_x} Z_x = \frac{x_0}{r_0} H \quad (47c)$$

$$\frac{1}{2\pi J_y} X_y = \frac{2x_0 y_0}{r_0^2} \left(F - \frac{1}{2} G \right) \quad (47d)$$

$$\frac{1}{2\pi J_y} Y_y = \frac{y_0^2 - x_0^2}{r_0^2} F - \frac{x_0^2}{r_0^2} G \quad (47e)$$

$$\frac{1}{2\pi J_y} Z_y = \frac{y_0}{r_0} H \quad (47f)$$

$$\frac{1}{2\pi J_z} X_z = \frac{x_0}{r_0} H \quad (47g)$$

$$\frac{1}{2\pi J_z} Y_z = \frac{y_0}{r_0} H \quad (47h)$$

$$\frac{1}{2\pi J_z} Z_z = G \quad (47i)$$

ここで

$$F = \frac{1}{r_0} \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 1; 0) dz \quad (48)$$

$$G = \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 0; 1) dz \quad (49)$$

$$H = \begin{cases} \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 1; 1) dz & (z_2 < z_0) \\ \int_{z_1}^{z_0} R(z) I(1, 1; 1) dz - \int_{z_0}^{z_2} R(z) I(1, 1; 1) dz & (z_1 < z_0 < z_2) \\ - \int_{z_1}^{z_2} R(z) I(1, 1; 1) dz & (z_0 < z_1) \end{cases} \quad (50)$$

ただし LEASON et al. (1955)によれば

$$I(1, 1; 0) = \frac{1}{k\sqrt{ab}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) F_0(k) - E_0(k) \right\} \quad (51)$$

$$I(1, 0; 1) = \frac{k^3(a^2 - b^2 - c^2)}{16ak'^2(ab)^{3/2}} E_0(k) + \frac{k}{4a\sqrt{ab}} F_0(k) \quad (52)$$

$$I(1, 1; 1) = \frac{ck}{4(ab)^{3/2}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) k'^{-2} E_0(k) - F_0(k) \right\} \quad (53)$$

である。

特に z 軸上 ($r_0=0$) では, (48)から(50)式において $r_0 \rightarrow 0$ の極限をとることによって

$$F_0 = \lim_{r_0 \rightarrow 0} F = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{R^2(z) dz}{\{R^2(z) + (z-z_0)^2\}^{3/2}} \quad (54a)$$

$$G_0 = \lim_{r_0 \rightarrow 0} G = 2 F_0 \quad (54b)$$

$$H_0 = \lim_{r_0 \rightarrow 0} H = 0 \quad (54c)$$

$R(z)$ が簡単な関数であれば, (54)式の積分は解析的に実行できる。

(47)式は表現が若干異なるものの, RIKITAKE(1951)による円錐台の磁場公式と同じものである。原論文では高さ z における円錐の断面半径を a , 円錐台の底面半径を a_0 としているから, (47)式において

$$R(z) = a = A z + B \quad (A = \cos\beta, B = a_0 - z_2 \cos\beta) \quad (55)$$

(β は斜面の傾斜角)と置いてやればよい。しかしながら導出過程から明らかなように, (47)式は任意の回転対称な一様磁性体の磁場を与える。このことを強調したために, 断面の半径を z の関数 $R(z)$ と表示したのである。

F, G, H を求める数値積分には, 二重指数関数型積分公式(森, 1974)をおすすめしたい。これは被積分関数が解析関数である場合には, 極めて精度の高い結果を与える。森のプログラムは, 倍精度の結果が自動的に得られるように設計されている。しかし補遺に与えた完全楕円積分の近似式が単精度の公式なので, 通常は4桁ないし5桁の精度に留まる。実用上はこれで十分であろう。

RIKITAKE(1951)の磁場公式が優れている点は, $R(z)$ が区分的になめらかな関数であれば, 観測点が磁性体のごく近傍であっても, 疑似的な磁場の発散を起こさないことである。例えば火山体の磁気異常を計算する場合に, 角柱の公式やTalwani法を用いるかぎり, 地上付近では磁性体のとがった角の作る見掛けの磁場発散を避けることが出来ない。NISHIDA & MIYAJIMA (1984)は, 有珠山の地上磁気測量結果を解釈するのにRIKITAKE公式を用いて, 山体の詳しい構造を明らかにした。彼らは円錐台の集合で火山体を近似している。山体の断面を2次以上のスプライン関数で近似したものを $R(z)$ として用いれば, よりスムーズな磁気異常が計算出来るであろう(NISHIDA & MIYAJIMAの方法は1次スプライン近似に相当する)。どなたかやってみませんか。

参考文献

- ASHOUR, A. A., and S. CHAPMAN, The magnetic field of electric currents in an unbounded plane sheet, uniform except for a circular area of different uniform conductivity, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 10, 31-44, 1965.
- EASON, G., B. NOBLE, and I. N. SNEDDON, On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions, *Phil. Trans. R. Soc., London, Ser. A*, 247, 529-551, 1955.
- HASTINGS C., Jr., Approximations for digital computers, 205pp., Princeton, 1955.

森正武, 「曲線と曲面—計算機による作図と追跡—」, 教育出版, 150pp., 1974.

NAGY, D., The evaluation of Heuman's lambda function and its application to calculate the gravitational effect of a right circular cylinder, *Pageoph.*, 62, 5-12, 1965.

NISHIDA, Y. and E. MIYAJIMA, Subsurface structure of Usu Volcano, Japan as revealed by detailed magnetic survey, *J. Volc. Geotherm. Res.*, 22, 271-285, 1984.

RIKITAKE, T., The distribution of magnetic dip in Ooshima (Oo-sima) Island and its change that accompanied the eruption of Volcano Mihara, 1950, *Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. Tokyo*, 29, 161-181, 1951.

SASAI, Y., Piezomagnetic field associated with the Mogi model revisited: analytic solution for finite spherical source, *J. Geomag. Geoelectr.*, 43, 21-64, 1991.

SINGH, S. K., Gravitational attraction of a circular disc, *Geophysics*, 42, 111-113, 1977.

WATSON, G. N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, 4th ed., Cambridge, 804pp., 1922.

補遺：第一種，第二種完全楕円積分およびホイマンのラムダ関数を計算するサブルーチン KEPI2はPHIとPKを引数として，これに対応する第一種(FK)，第二種完全楕円積分(FE)およびホイマンのラムダ関数(DLMD)を計算する。ただしこのサブルーチンの中でDELLIPをCALLして，FKとFEを計算している。PHIは $\sin^2\beta = (p-k^2)/p(1-k^2)$ で定義される位相角 β であり，PKは完全楕円積分のパラメタ k である。H-L積分の場合，

$$\sin^2\beta = \frac{c^2}{(a-b)^2 + c^2}, \quad k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + c^2}$$

で与えられる。力武公式を用いる場合には，DELLIPだけでよい。

```

C      COMPLETE ELLIPTIC INTEGRALS AND HEUMAN'S LAMBDA FUNCTION
C      K AND E BY HASTINGS JR. HEUMAN'S LAMBDA F. BY NAGY
      SUBROUTINE KEPI2(PHI,PK,FK,FE,DLMD)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      PI=3.141592653589793D0
      CALL DELLIP(PK,FK,FE)
      CPK2=1.0D0-PK*PK
      A0=-FE
      C2=CPK2*FK
      D2=0.5D0*FE*CPK2
      A2=C2-D2
      T0=PHI
      S1=DSIN(PHI)*DCOS(PHI)
      T2=-0.5D0*S1+0.5D0*T0
      DS=DSIN(PHI)**2
      DLMD=-A0*T0-A2*T2
      N=1000
      DO 100 M=2,N
      AM=DFLOAT(2*M)
      C2=(AM-3.0D0)/(AM-2.0D0)*C2*CPK2
      D2=(AM-1.0D0)/AM*D2*CPK2
      A2=C2-D2
      S1=S1*DS
      T0=T2
      T2=(-S1+(AM-1.0D0)*T0)/AM
      DLMD=DLMD-T2*A2
100   CONTINUE
      RETURN
      END
C      COMPLETE ELLIPTIC INTEGRAL OF THE 1ST AND 2ND KIND
C      DOUBLE PRECISION - APPROXIMATE FORMULA BY C. HASTINGS
      SUBROUTINE DELLIP(PK,FK,FE)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(5),B(5),C(4),D(4)
      DATA A/1.38629436112D0,0.09666344259D0,0.03590092383D0,
      .      0.03742563713D0,0.01451196212D0/
      DATA B/0.5D0,0.12498593597D0,0.06880248576D0,
      .      0.03328355346D0,0.00441787012/
      DATA C/0.44325141463D0,0.06260601220D0,
      .      0.04757383546D0,0.01736506451D0/
      DATA D/0.24998368310D0,0.09200180037D0,
      .      0.04069697526D0,0.00526449639D0/
      Z=1.0D0-PK**2
      DZ=DLOG(Z)
      FK1=A(5)*Z
      FK2=B(5)*Z
      FE1=C(4)*Z
      FE2=D(4)*Z
      DO 1 I=1,3
      FK1=(FK1+A(5-I))*Z
      FK2=(FK2+B(5-I))*Z
      FE1=(FE1+C(4-I))*Z
1     FE2=(FE2+D(4-I))*Z
      FK=A(1)+FK1-(B(1)+FK2)*DZ
      FE=1.0D0+FE1-FE2*DZ
      RETURN
      END

```