

MT法で得られる比抵抗構造の 有限要素法による3次元モデリング

九州大学工学部 茂木 透, 梶原竜哉

Three dimensional modeling of MT resistivity structure
by finite element method.

Tohru MOGI, Tatsuya KAJIWARA

Faculty of Engineering, Kyushu University

1. はじめに

MT法により得られる比抵抗構造の3次元モデリングについては、これまでも有限差分法 (Lines and Jones, 1973, Jones and Vozoff, 1978)、有限要素法 (Reddy et al., 1977, Pridemore et al., 1981)、積分方程式法 (Weidelt, 1975, Ting and Hohmann, 1981)等の研究が行われてきている。しかし、これらの研究では、単純な地下構造モデルに対する計算例が示されるに留まり、複雑な実際の地下構造のモデリングに用いるための検討は不十分である。複雑な地下構造のモデリングを日ざす場合、自由に構造や地形を容易に表現できる点で有限要素法によるモデリングが最も適していると、著者らは考えている。これまでは、計算機のメモリーや計算時間の制限等により、複雑な地下構造のモデリングは困難なことが多かった。しかし、今日計算機の発達は目ざましいものがあり、3次元モデリングも実用的に行える可能性が出てきたものと思われる。

本報告では、複雑な地下構造や地形の表現が可能であり、精度の向上が期待できる、形状関数を2次式としたアイソパラメトリック要素を用いた有限要素法について述べると共に、例題として平湯温泉地域の比抵抗構造の3次元モデリングを行った結果も述べる。

2. 計算方法

ソースのない空間において、 $\exp(-i\omega t)$ の形をした時間変化する平面電磁波に対するマックスウェルの方程式は、変位電流を無視すればSI単位系について次のように表される。

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad (2)$$

(1), (2)より

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{E} :電場、 \mathbf{H} :磁場、 ω :角周波数、 μ :透磁率、 σ :導電率であり、 $k^2 = i\omega\mu\sigma$ である。(3)式の数値解を求めることになるが、(3)式を \mathbf{H} に関する式にすることも可能であり、その場合は地表にも境界条件を与える必要があり、地

下構造がある時等は積分方程式法等で境界値を別に求める必要がある (Best et al., 1985)。 (3) 式の有限要素法による一般的な解法については、Reddy et al. (1977) 等にあるので、ここでは詳しい説明は省略する。

(3) 式は、 N を形状関数として、ガラーキソ法により次のような要素方程式に変形される。

$$\sum_{i=1}^n \left[\int \left(\left[\frac{\partial N_j \partial N_i}{\partial y \partial y} + \frac{\partial N_j \partial N_i}{\partial z \partial z} + k^2 N_j N_i \right] (E_{x_i}) - \left[\frac{\partial N_j \partial N_i}{\partial y \partial x} \right] (E_{y_i}) - \left[\frac{\partial N_j \partial N_i}{\partial z \partial x} \right] (E_{z_i}) \right) dv - \int N_j \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} (E_{x_i}) - \frac{\partial N_i}{\partial x} (E_{y_i}) \right) dx dz - \int N_j \left(\frac{\partial N_i}{\partial z} (E_{x_i}) - \frac{\partial N_i}{\partial x} (E_{z_i}) \right) dx dy \right] = 0 \quad (4)$$

有限要素法によるモデリングの精度を上げるには、基本的には要素数を増やすことが考えられるが、要素の形状関数の次数を上げ自由度大きくするのも有力な方法である。複雑な地下構造の場合、通常用いられる 1 次形状関数では 2 次元モデリングにおいても十分な精度が得られないことがある (茂木, 1988)。従って、3 次元モデリングにおいても 2 次形状関数を用いる必要があると考えた。3 次元六面体要素に対する形状関数は、次のように書ける (Connor and Brebbia, 1976)。

(1) 1 次形状関数 (8 節点六面体要素)

$$N_i = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_i + \alpha_3 \eta_i + \alpha_4 \zeta_i + \alpha_5 \xi_i \eta_i + \alpha_6 \eta_i \zeta_i + \alpha_7 \xi_i \zeta_i + \alpha_8 \xi_i \eta_i \zeta_i \quad (i=1 \dots 8) \quad (5)$$

(2) 2 次形状関数 (20 節点六面体要素)

$$N_i = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_i + \alpha_3 \eta_i + \alpha_4 \zeta_i + \alpha_5 \xi_i \eta_i + \alpha_6 \eta_i \zeta_i + \alpha_7 \xi_i \zeta_i + \alpha_8 \xi_i \eta_i \zeta_i + \alpha_9 \xi_i^2 + \alpha_{10} \eta_i^2 + \alpha_{11} \zeta_i^2 + \alpha_{12} \xi_i^2 \eta_i + \alpha_{13} \xi_i \eta_i^2 + \alpha_{14} \eta_i^2 \zeta_i + \alpha_{15} \eta_i \zeta_i^2 + \alpha_{16} \xi_i^2 \zeta_i + \alpha_{17} \xi_i \zeta_i^2 + \alpha_{18} \xi_i^2 \eta_i \zeta_i + \alpha_{19} \xi_i \eta_i^2 \zeta_i + \alpha_{20} \xi_i \eta_i \zeta_i^2 \quad (i=1 \dots 20) \quad (6)$$

ここで、 ξ, η, ζ は要素毎に定義される局所座標系のパラメータ、 α_i は未定係数である。ここでは以下、1 次形状関数を用いた場合を 1 次要素、2 次形状関数を用いた場合を 2 次要素による計算と呼ぶことにする。

地形や不規則な形状の地下構造を表現するために、直方体以外の不規則な六面体要素を組み立てる必要がある。そのために、局所座標系では直方体でモデル全体の座標系では不規則な六面体となるような適当な座標変換則を用いる。モデル全体の座標系 x, y, z 直角座標系に対して、変形させる要素毎に局所座標系として ξ, η, ζ 斜交座標系を定義する。これらの座標系間の最も簡便な変換式として形状関数を用いることができる (Connor and Brebbia, 1976)。すなわち、次のように表せると考える。

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots = \sum N_i x_i \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots = \sum N_i y_i \\ z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots = \sum N_i z_i \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 x_i, y_i, z_i は各節点座標である。未知量の変化も形状の決定も同じ節点で定義された値を用い、形状と未知関数を定義する形状関数が同じとき、要素はアイソパラメトリック (isoparametric) と呼ばれる。局所座標系と全体座標系の間には2つの変換が必要となる。まず、全体座標系での微分を局所座標系での微分で表現させなければならない。次に要素の体積積分を行う積分範囲を適当な変換によって局所座標系に直す必要がある。

微分の変換は、局所座標系を ξ, η, ζ 全体座標系を x, y, z とすれば、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる。ただし、

$$[J] = \begin{bmatrix} \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} y_i & \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} z_i \\ \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} y_i & \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} z_i \\ \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} y_i & \Sigma \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで $[J]$ はヤコビアン (Jacobian) と呼ばれる。

また、変数及び積分の範囲の変換は、 $[J]$ の行列式を用いて次のようになる。

$$dx dy dz = \det [J] d\xi d\eta d\zeta$$

従って、局所座標系が正規化された形であれば、この積分は

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (T(\xi, \eta, \zeta)) d\xi d\eta d\zeta \quad (10)$$

と書ける。ここで、 T は (4) 式の体積積分の項を表す。この体積積分には分点数 3 の Gauss の求積法を用いた。

境界条件の挿入を簡単にするために、モデルの周辺部では均質構造であるようにし、構造の表現部で境界の影響がなくなるように端の要素は長さを 5δ (δ : スキンデプス) 以上にした。さらに、大気の部分もモデルの最上部の節点が地表から 10δ 以上になるように大きくとった。同様に最下部も構造の下端から 5δ 以上なるようにした。境界条件は、モデルの最上面にはソースフィールドとして単位量の電場を与えることにした。モデルの側面の境界面では、均質半無限構造に対する電場の値を、最下面の境界には 0 を与えた。

大規模な係数マトリックスを持つ連立一次方程式の解法には様々な方法があるが、ここでは節点数の多い 2 次要素では SOR 法、1 次要素では改訂コレスキー法を使用した。SOR 法は必要とする計算機メモリーが少ないという利点がある

が、係数マトリックスの性質と加速係数の選び方によって収束までの反復計算回数が大きく左右され、十分に収束しないこともあるという欠点がある。改訂コレスキー法は係数マトリックスを分解する直接法で求めるので誤差は小さい。しかし、係数行列が疎行列の時やバンド幅が大きい時はfill inが起こるので計算機メモリーを多くとる必要がある。この方法は、ベクトルプロセッサを利用すれば高速化できるので、スーパーコンピュータには最適の方法である。

有限要素法の解として得られる電場から(1)式により磁場を求めるが、その際の微分の計算は形状関数の微分形(8)式を用いて行った。ある節点の微分を計算する時、その節点を含むどの要素を用いてもよいが、要素により微分値が異なることがあった。このことは、有限要素法では要素間で微分の連続性が保証されていないと言う原理的問題もあるが、やはり電場の計算精度が悪い場合に微分値の差も大きい。

3. 計算精度の検討

計算精度の検討は、2次元構造について3次元有限要素法による計算結果と2次元有限要素法の結果とを比較することにより行った。ここで用いた2次元有限要素法は、2次形状関数6節点3角形要素を用いる計算法で、通常の2次元構造については解析解に対する計算誤差が3%以内である(茂木、1988)。

(1) 断層構造

異なる比抵抗を持つ構造が接している断層構造を3次元有限要素法では図-1のように表現した。100Ωmと10Ωmとが接する構造に対する2次元有限要素法の計算結果と3次元有限要素法による図-1中心線上での結果を図-2に示す。この結果は、上空26.2kmに構造の走向方向に1V/mの電場を与えた時(R-polarization)及びその直交方向に与えた時(H-polarization)の地表での値である。誤差は電場の虚数部が目だつ。R-polarizationでは、2次元計算との差は、2次要素で最大5%であるが1次要素で最大19%であった。H-polarizationでは構造の境界付近で誤差が大きい。この場合、構造の境界では電荷の蓄積が起こり電場は不連続になるが、有限要素法では常に電場は連続として解くので誤差が生じる。2次元有限要素法では、電場は磁場の微分として得られ、一般に2次以下の形状関数を用いた場合には要素境界で微分値は不連続であるために構造の境界でも大きな誤差を生じない。構造の境界付近の1~2節点を除いた計算誤差は2次要素で最大18%、1次要素で最大17%であった。構造の方向と異なる方向に境界条件の電場を与えれば、H-polarizationの極端に大きな誤差を少なくすることができるが、この場合R-polarizationの誤差は大きくなる。

2次要素ではSOR法で解を求めるが、数千回の反復計算でも相対誤差は 10^{-3} 程度が多く、解が十分に収束しているとはいえず、この誤差が含まれていると考えられる。改訂コレスキー法等で計算できれば誤差は少し小さくなるであろう。

見掛比抵抗値(図-3)についてみると、境界付近を除くと2次要素では誤差は最大21%、1次要素では最大69%となり、両者の差は大きくなる。これは、2次要素では要素内の関数の微分が1次関数であるが、1次要素ではそれは定数と

数
ス
し、
モ
高
際
計
な
れ
値
2
限
造
1
法
。
i-
。
次
造
場
る。
形
状
の
大
素
を
き
0-3
と
考
る。
誤
差
2
致
と

なり不十分な近似のために誤差が大きくなる。

(2) 山脈状地形

2次元山地形での精度を調べるために、3次元有限要素法では構造を図-4のように表現した。大地の比抵抗は $100\Omega\text{m}$ 、斜面の傾斜角が $20'$ の時の計算結果を図-5に示した。R-polarizationでは、2次要素では4%、1次要素でも8%以下の誤差であった。H-polarizationでは、山頂部で誤差が大きいがその1点を除けば、誤差は2次要素で8%、1次要素では20%であった。電場の誤差はこの程度であるが、見掛比抵抗値(図-6)では、微分の計算精度に差があるために2次要素と1次要素との精度の差が大きくなる。

4. 適用例—平湯温泉地域の比抵抗モデリング

以上の検討により、比抵抗構造の地表での境界や地形の頂部近傍1~2節点を除けば大きな誤差はないと考えられるので、フィールドデータを用いた比抵抗モデリングへの適用を試みた。

平湯温泉地域は、岐阜県北東部にあり、 70°C 以上の温泉源が数多く分布し、また、付近には地下 100m で 100°C を越える温度を示す高温岩体の存在も知られている地熱地域である。この地域においてELF-VLF MT法を図-7に示した28測点で行い、図-8のような見掛比抵抗分布が得られた。この値は $7.8\text{H}\Omega$ でのテンソル見掛比抵抗のインヴァリant値である。まず、各測点毎に層構造解析を行い、それを基に図-7に示した線上の断面について2次元比抵抗構造モデリングを行った。3次元モデリングは、点線の範囲内($700\text{m}\times 700\text{m}$)で行った。この範囲の構造を2次元モデルを基に 9×10 のセグメントでモデルを作成した。その外側には更に2セグメントを加え、外側境界の影響をなくした。鉛直方向には12セグメント用い、4セグメントを空中部とし、8セグメント用いて構造のモデリングをした。結局、セグメント数 $13\times 14\times 12$ 、要素数2184、節点数10333の有限要素法計算になり、必要としたコンピュータのメモリーは約65MBである。計算に要した時間は、SOR法の反復計算回数5000回で約50分であった。多数の反復計算にもかかわらず相対誤差は 10^{-3} 程度と不十分な収束であった。得られた3次元モデルを図-9に示す。標高 1100m 以下では、南及び東から中央部の泉源地域に延びる低比抵抗構造が見られる。他のデータと併せて解釈すると、この構造は古生層中の特に破砕の富んだ所に相当し、温泉水の流動経路となっている。R-R'断面について2次元モデルと3次元モデルとを比較した(図-10)。この図によると、二つのモデルで表層の形や第2層の深度等に違いがみられ、2次元構造の方がやや複雑な構造となっている。2次元構造では地形や構造の影響が極端にでるために必要以上に複雑な構造になることがある。図-11には測定値と比抵抗構造モデルに対する見掛比抵抗値とを比較した結果を示した。

5. まとめ

この報告では、2次形状関数アイソパラメトリック要素を用いた3次元有限要素法による比抵抗モデリングの精度について述べ、更にその平湯温泉地域への適

用について述べた。ここで述べた計算法は、地表の比抵抗境界や地形の頂部近傍を除けば計算誤差はほぼ20%以下に抑えられ、測定値の精度を考慮すれば、比抵抗モデリング法として実用的に有効ではないかと考えられる。しかし、不連続電場の扱い等の原理的問題や計算機容量の限界による解の精度の不良、微分計算の問題等の問題点も多い、今後共検討を続けて行く必要がある。

<参考文献>

- Best, M. E., Duncun, P., Jacobs, F. J., and Scheen, W. L., 1985, Numerical modeling of the electromagnetic response of three-dimensional conductors in a layered earth., *Geophysics*, vol. 50., P. 665-676.
- Conner, J. J. and Brebbia, C. A., 1976, *Finite element techniques for fluid flow.*, Butterworth & Co. Ltd., (奥村敏恵、坂井藤一、岩本卓也訳、1978、流体解析への有限要素法の応用、サイエンス社)
- Jones, F. W. and Vozoff, K., 1978, The calculation of magnetotelluric quantities for three-dimensional conductivity inhomogenities., *Geophysics*, vol. 43, p. 1167-1175.
- Lines, K. H. and Jones, F. W., 1973, The perturbation of alternating geomagnetic fields by three dimensional island structure., *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, vol. 32, p. 133-154.
- 茂木透、1988、MT法による比抵抗モデリングの精度、物理探査学会昭和63年度秋期学術講演会講演論文集、p. 173-176.
- Pridemore, D. P., Hohmann, G. W., Ward, S. H. and Sill, W. R., 1981, An investigation of finite element modeling for electrical and electromagnetic data in three-dimensions., *Geophysics*, vol. 46, p. 1009-1024.
- Reddy, I. K. and Rankin, D., 1977, Three-dimensional modeling in magnetotelluric and magnetic variational sounding., *Geophys. J. R. astr. Soc.* vol. 51, p. 313-325.
- Ting, S. C. and Hohmann, G. W., 1981, Integral equation modeling of three-dimensional magnetotelluric response., *Geophysics*, vol. 46, p. 182-197.
- Weidelt, P., 1975, Electromagnetic induction in three dimensional structures., *J. Geophys.*, vol. 41, p. 85-109.

部近傍
比抵
連統電
計算の

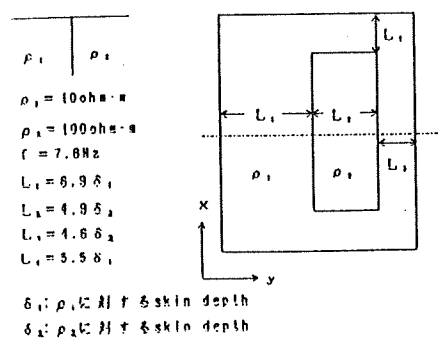


図-1. 2次元断層構造モデル

ical
on-
卓也訳、

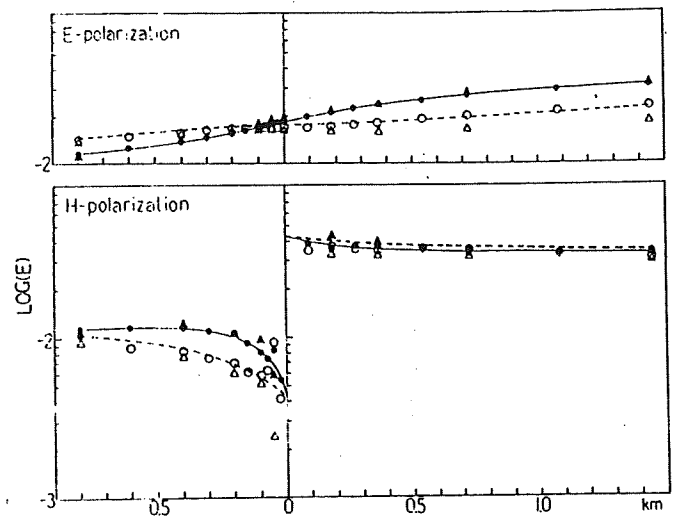


図-2. 断層構造に対する電場の計算結果
 2次元有限要素法による計算結果: 実部: —、虚部: ---
 3次元有限要素法による計算結果: 2次形状関数: 実部: ●、虚部: ○、
 1次形状関数: 実部: ▲、虚部: △

c
geo-
J.

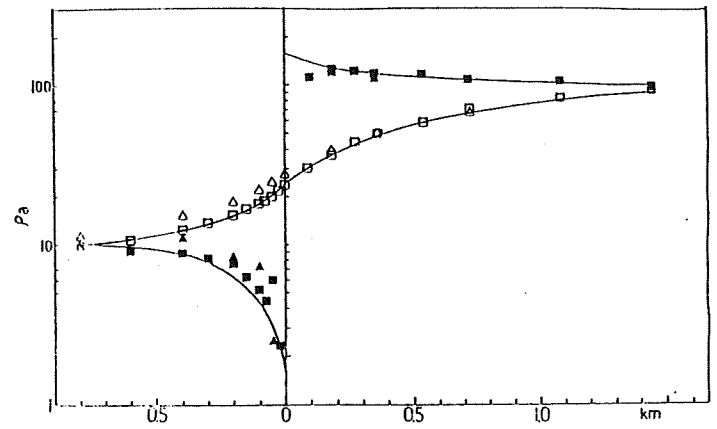


図-3. 断層構造に対する見掛比抵抗
 2次元有限要素法による計算結果: —、
 3次元有限要素法による計算結果: 2次形状関数: H-polarization: ■、
 E-polarization: □、1次形状関数: H-polarization: ▲、E-polarization: △

3年度

Electro-
1024.
meto-
c.

Three-
2-197.

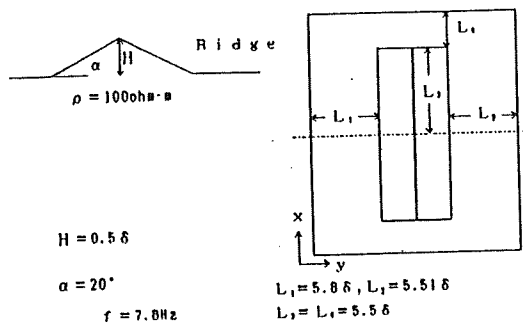
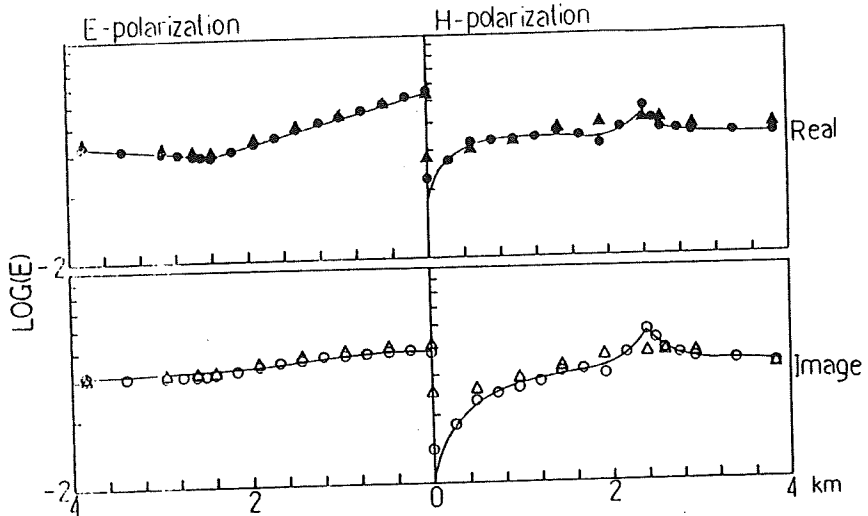
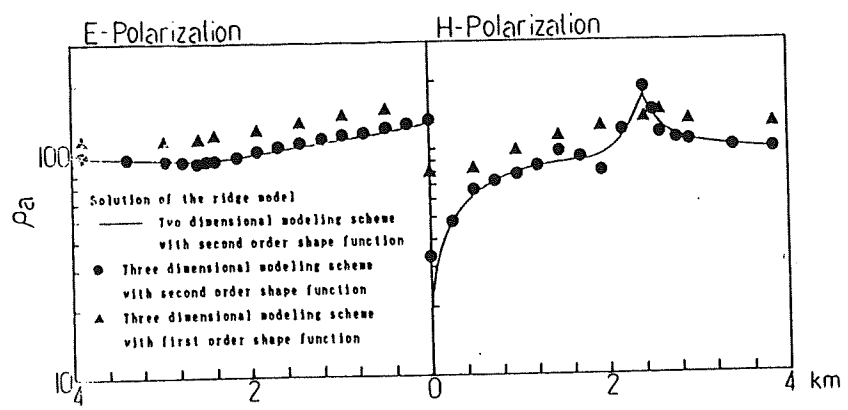


Fig. 4.13 2次元地形モデル

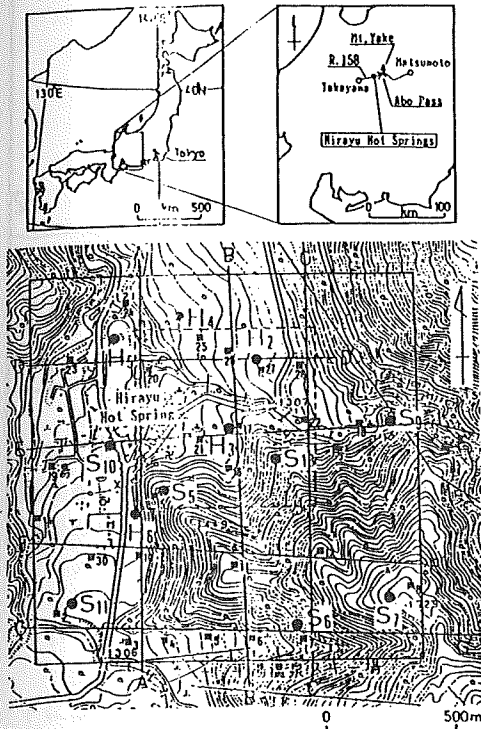
図一四. 2次元山地形モデル



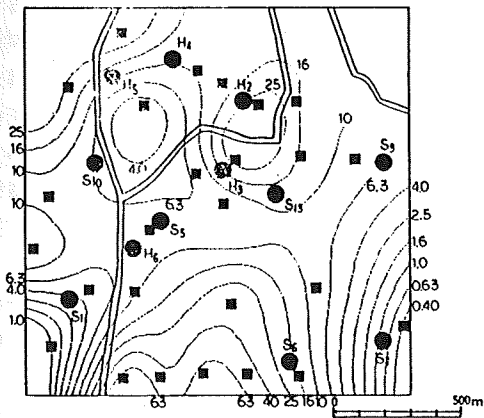
図一五. 山地形に対する電場の計算結果
 2次元有限要素法による計算結果: 一、3次元有限要素法による計算結果:
 2次形状関数: 実部: ●、虚部: ○、1次形状関数: 実部: ▲、虚部: △



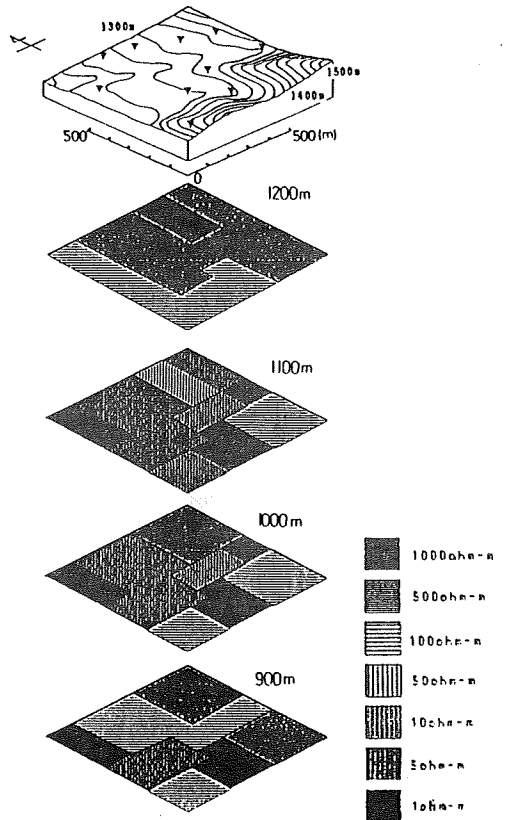
図一六. 山地形に対する見掛比抵抗
 2次元有限要素法による計算結果: 一、3次元有限要素法による計算結果:
 2次形状関数: ●、1次形状関数: ▲



図一七. 平湯温泉の位置および湧点分布
Hirayu I (●: 湧点、■: 調査孔)



図一八. インバリアント見掛け比抵抗 (7.8Hz)、単位: Ωm



図一九. 3次元比抵抗構造

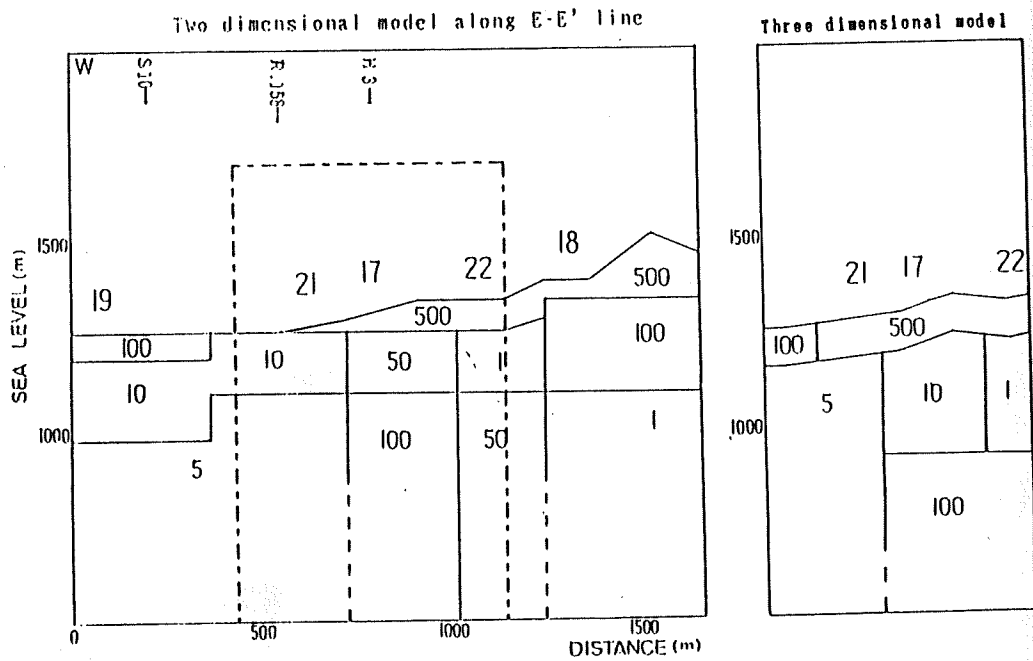


図-10. 2次元比抵抗構造と3次元比抵抗構造との比較

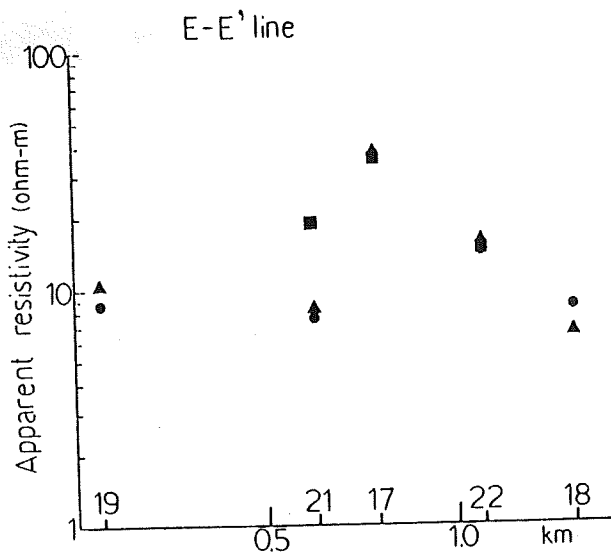


図-11. 測定値と比抵抗構造モデルに対する見掛比抵抗