

岩脈貫入に伴うピエゾ磁気変化

東京大学地震研究所 笹井 洋一

1. はじめに

1983年10月3日に、三宅島で21年ぶりに典型的な割れ目噴火が起った。この噴火に伴う地磁気変化の観測結果は、本シンポジウムの中川・他¹⁾による報告に詳しい。火山活動に伴う地磁気変化は、高温なマグマの貫入、あるいは熱水循環によって、山体を構成する岩石が帯磁を失なうこと、あるいはその逆過程としての冷却による帯磁獲得で説明されてきた(例えば Rikitake²⁾, Yokoyama³⁾)。実際、三宅島の1940年噴火(Takahashi and Hirano⁴⁾, Kato⁵⁾)および1962年噴火(Kato and Muroi⁶⁾)では、噴火前後に数百nTにおよぶ、鉛直分力あるいは伏角の変化が検出されたとされ、いずれも温度変化で説明された。しかし今回の三宅島噴火に際しては、噴火の直後と1980年の測定を比較すると、顕著な(少なくとも10nTを越すような)全磁力変化は認められていない。今回の活動に関する限り、山体の相当な体積部分が熱消磁されるような、大規模なマグマ溜りの形成あるいは熱水活動は起らなかった、と考えられる。

三宅島の地磁気変化は、むしろ噴火後になってはっきり検出されている。山頂噴気温度測定でも、噴火の前および直後では特に変化が検出されず、噴火後一ヶ月を経て、熱異常の拡大が認められた(鍵山・他⁷⁾)。噴火後に観測されている地磁気変化は、熱異常のかなり急速な拡大を示唆している。従って火山活動の全容を理解する上で、地磁気観測が有力な手段であることに変わりはない。

ここで火山活動に伴う地磁気変化のうち、もうひとつの原因によるもの、即ち応力によるピエゾ磁気変化について考察したい。筆者⁸⁾はマグマ溜りの膨張を理想化した、半無限弾性体中の一様膨張力源(いわゆる茂木モデル)に伴う地磁気変化を求めた。しかし三宅島の噴火活動は、マグマが面的な割れ目を形成しながら地表へ噴出するもので、茂木モデルは当てはまらない。この場合には、引張り割れ目をくい違い面とする応力場を考えなくてはならない。ここでは最も簡単に、長方形の薄いマグマ・シートが垂直に貫入した場合を考えた。モデルのパラメタは三宅島の割れ目噴火を例にとって計算した。

2. くい違いの弾性論を適用したダイク・モデル

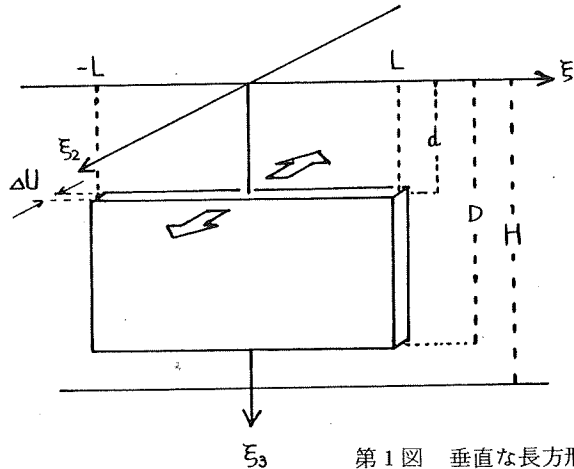
地球を半無限弾性体と考え、地表からある深さまで、一様に帯磁しているとする。弾性体内に

生じたくい違い面 Σ によるピエゾ磁気変化のポテンシャルは次式で与えられる (Sasai⁹⁾):

$$W_m(Q) = \beta J_m \int_{\Sigma} \Delta u_k(P) \cdot W_{k\ell}^m(P, Q) \nu_{\ell}(P) d\bar{z}(P) \quad (1)$$

ここで β は磁気応力係数, J_m は m 軸方向の帯磁, Δu_k はくい違い変位の k 成分, ν_{ℓ} は面 Σ の法線の ℓ 成分, $W_{k\ell}^m(P, Q)$ は点 P における $(k\ell)$ 型の歪核が点 Q に作るピエゾ磁気変化の, 磁気ポテンシャルである。 $W_{k\ell}^m$ の具体的な表現は Sasai⁹⁾に与えられている。なお, 上式は総和記号を省略している。

(1)式は, くい違い面 Σ による変位を与えるVolterraの公式と, 全く同じ形式をとっている。 Σ の形が単純で, くい違い量 Δu が Σ 上のどこでも一定ならば, (1)式の積分は解析的に実行でき, 初等関数で表わされる。例えば, 面 Σ が鉛直から傾いていて, 一辺は地表に平行な平行四辺形であれば, 積分は解けるが, 煩雑な計算が必要となる。



第1図 垂直な長方形ダイクと座標系

第1図に示したような直角座標系をとり, くい違い面 Σ として, $x-z$ 面内において, x 軸に一辺が平行な長方形を考える。この面が Δu だけ開口するというくい違いモデルで, マグマの貫入の様子を近似する。この場合は $(k\ell) = (22)$ 型の歪核のみが現われ, 次の積分を評価することになる。

$$W_m = \frac{1}{2} \mu \beta J_m \Delta u \int_{-L}^L \int_{-L}^L W_{22}^m(x - \xi_1, y, z, \xi_3) d\xi_1 d\xi_3 \quad (2)$$

$$(m = x, y, z)$$

ΔU はダイクの厚さである。なお、このような垂直な長方形ダイクによる地表変位はMaruyama¹⁰⁾によって、又この長方形が傾いている場合の地表変位は、Davis¹¹⁾によって与えられている。

3. 二次元ダイクによるピエゾ磁気変化

まず、このダイクが水平方向に無限に長い、二次元モデルを考える。この場合の応力場、従ってそれによる帯磁変化は比較的単純なので、これによって生ずる磁場を直観的に把握し易い。二次元ダイクの形成(ダイクの厚さの増加)に伴う主要な応力成分は、ダイクに平行な面に垂直な圧縮力である。この方向の帯磁 J_y は、単純圧縮によって減少する。この帯磁変化によって、地表の水平磁場成分が卓越する。一方鉛直方向の帯磁 J_z は、帯磁と直角方向の単純圧縮によって増加する。従ってダイク真上を中心として、鉛直磁場成分 H_z が増加する。最後に、ダイク走向と平行な水平帯磁成分 J_x も、磁場と直角方向からの単純圧縮で増加する。二次元の仮定によって、この帯磁変化は x 軸方向に一樣に生ずるため、磁力線の湧き出し口が無限遠に遠去かり、地表では磁場は観測されない。以上の議論では、ダイクの上端と下端附近に生ずる張力場の影響を無視している。

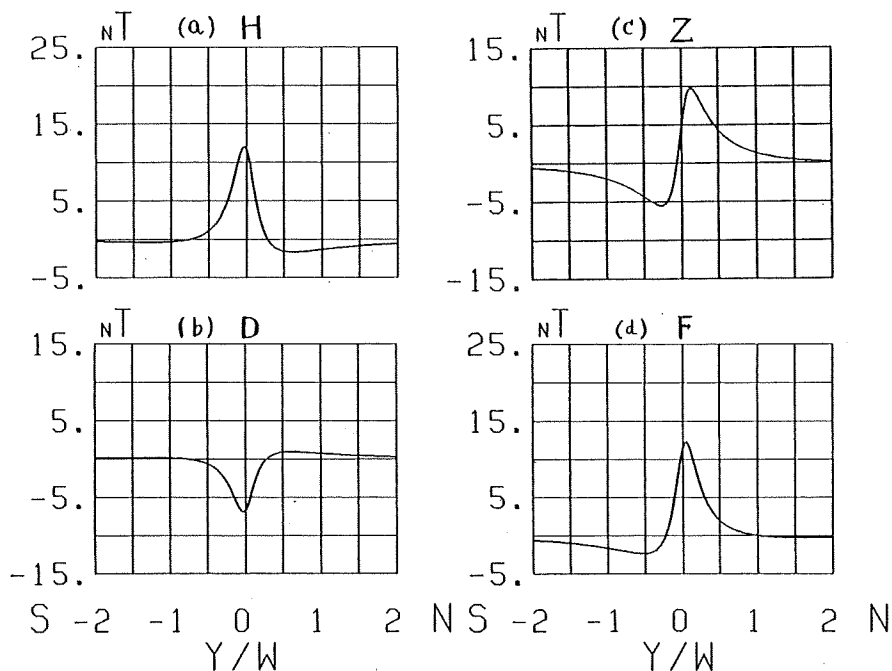
(2)式の ξ_1 に関する積分を実行して、 $L \rightarrow \infty$ の極限をとり、更に ξ_3 について積分して、二次元モデルによるピエゾ磁気ポテンシャルを得る。これを補録Aに記した。これは $d \leq z \leq D$ という面(ダイクの位置と一致)および $2H-d \leq z \leq 2H-D$, $2H+d \leq z \leq 2H+D$ という面上に、 y 軸又は z 軸方向を向いた一樣な双極子、四重極等を分布させた場合の磁気ポテンシャルに等しい。よく知られているように、一樣な多重極の面分布は、その面の周縁を流れる定常線電流(仮想的な多重電流系)の作る磁場と等しい。従って補録Aの解は、 z 軸上の点 $z=d$, D およびこれ等のキュリー点深度 H についての鏡像点 $z=2H \pm d$, $2H \pm D$ を x 軸方向に走る、線電流群の作る磁気ポテンシャルの和ともみなせる。

第1表 二次元ダイクのパラメータ

ダイクの厚さ	ΔU	1 0 cm
上端の深さ	d	2 0 0 m
幅	W	1 Km
走向(磁氣的北から)	φ	N 6 0° E
地磁気伏角	I_0	4 6°
帯磁	J	3.0×10^{-2}

磁気応力係数	β	-1.0×10^{-4}	bar ⁻¹
率	μ	3.5×10^{11}	cg s

第1表に示したパラメータを用いて、二次元ダイクの形成に伴う地磁気変化を求めた。第2(a)~(d)図には、ダイク走向に垂直な地表の測線上での地磁気4成分(H, D, Z, F)の変化を示した。



第2図 二次元ダイクによる地磁気変化、ダイク走向に直角な地表でのプロファイル。(a)H成分、(b)D成分(東向きを正)、(c)Z成分、(d)F成分。

これ等のパターンは、ダイクの走向によって大きく変る。しかし全磁力に着目すると、ダイクの真上付近では常に増加する。特に東西走向に近くなると、全磁力の変化は最も大きくなる。

次にダイクの幅を変えずに、ダイクの位置を地表に対して上下させると、地表に近づくと共に、全磁力の変化は極めて大きくなる(第3図)。一方ダイクの上端を固定し、ダイクの幅を広げていっても、変化量の最大値は変わらず、変化域が若干拡がる程度である。

結局、二次元ダイクの地磁気変化の大勢を決めているのは、ダイク上端の深さ d である。ここは地表に最も近い等価線電流系の位置であるから、当然と云えよう。

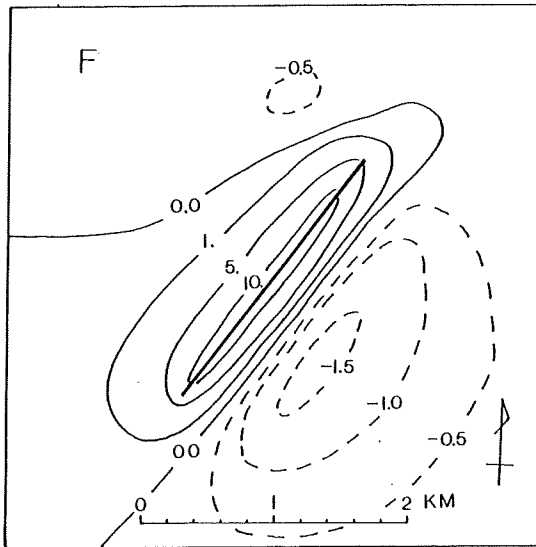
4. 長方形ダイクによるピエゾ

磁気変化

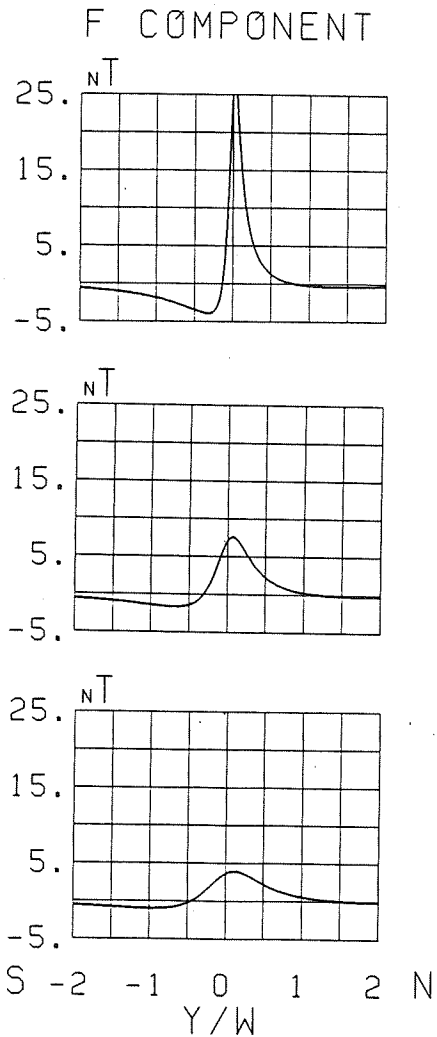
長方形のダイクのピエゾ磁気ポテンシャルを、補録Bに載せた。第2表にまとめたパラメータによるダイクの形成に伴う、全磁力の変化を第4図に示す。

第2表 長方形ダイクのパラメータ

ダイクの厚さ	ΔU	10 cm
上端の深さ	d	200 m
幅	W	1 Km
長さ	$2L$	2.2 Km
走向(磁氣的北から)	φ	$N47^\circ E$



第4図 長方形ダイクの形成に伴う全磁力変化の一例。



第3図 第2図と同じサイズのダイクについて、深さを変えた場合の全磁力プロファイル。上から $d=100\text{m}$, 300m , 500m 。

有限長のダイクの場合は、ダイクの両端部も磁力線の湧き出し口となり、磁場のパターンは二次元ダイクと比べるとかなり複雑になる。ダイクの長さ以外は同一のパラメータを用いて、二次元と三次元のダイクを比べると、長方形モデルの方が磁場の最大変化量は大きくなる傾向がある。これはダイク走向に平行な水平帯磁成分 J_x の変化が、寄与するためであろう。重要な特徴は、観測にかかるような強さの磁場変化は、ダイクの近傍に限られることである。三宅島のように帯磁の強い火山では、わずか 10 cm のダイクの開口でも、ダイク上端が地表から数百 m に迫った時、数 nT 以上の変化が観測される可能性がある。厚さが 1 m ならば、変化量は 10 倍される。しかしこのような変化域は比較的狭いので、観測点配置が難しい。

5. 考 察

マグマのダイク状貫入に伴ない、ピエゾ磁気効果によっても、かなり大きな地磁変化が生じ得ることが示された。この貫入が短時間に起るなら、ダイクの周囲で熱消滅される体積はごく小さいと考えられるので、地磁気変化の原因としては、圧力効果が主役となろう。

今回の三宅島噴火では、地下の比較的深い所（数 km ?）の小規模なマグマ溜り（これは地磁気変化が噴火前の 3 年間にほとんど無かった、という観測事実からの要請である）から、マグマが地表への上昇を開始し、約 1 時間で地表に到達した、と想像される。活潑な熔岩噴出を続けていた間、この割れ目は熔岩で満たされていたが、噴出活動の終焉と共に、開口部が周囲の封圧である程度閉じる現象も起ったに違いない。更に特徴的な長周期地震の発生状況から、噴火後約 1 ヶ月の間に、岩脈中のマグマが地下深所への drain back（逆流）を起したと推定されている（地震総合観測班¹²⁾）。このように、張力割れ目の形成というダイナミックな過程にあわせて、噴火地点の近傍では、大きな地磁気変化が生じた可能性がある。

現実の三宅島では、噴火時に地磁気の連続観測が行なわれていた訳でもなく、くり返し測量にしても、噴出物による擾乱を避けられた測点は、割れ目から離れすぎていて、本稿のモデルを検証できなかった。

噴火直後に割れ目北東端に設けられた固定観測点では、噴火後 1 ヶ月間で 10 nT 以上の全磁力減少が観測されている。中川・他¹⁾による Talwani 法を用いた詳細な吟味によると、測点近傍の噴出物が冷却したことによる帯磁では、この変化量を説明できない。地震学的情報から推定されているように、この 1 ヶ月間に少し深い所で、マグマの drain back があつたとすれば、これはダイク形成の逆現象であるから、全磁力の減少が期待される。中川・他¹⁾が論じているように、フィッシャー点の全磁力変化は、割れ目内部の熔岩の冷却によっても説明できるので、圧力効果原因説は、あくまで可能性のひとつに留まる。

三宅島火山では、安定した火道が形成されず、島内いたる所から割れ目噴火を起した履歴を持つ(宮崎¹³⁾)。この火山の噴火予知は極めて難しいとされている。今回噴火した地域の一部を占める村営牧場は、常時人の監視の下に置かれていたが、噴火前に植生の異常も観察されなかった。そして“ジェット機のような”轟音と共に熔岩が噴き出す迄、後に形成された割れ目からわずか300m程の所でテニスを楽しむ人達が居た。三宅島では、噴火の直前予知も重要な課題である。

噴火の一時間前に始まった火山性地震は、後から解釈すれば、熔岩の地表への突出開始を意味していた。しかし地震の発生だけでは、噴火の警報を出すには十分とはいえない。現段階では願望の域を出ないが、適切に配置された差分型全磁力計(数百m間隔で全磁力差を連続的に計測)の情報は、地震や歪計測と組み合わせることにより、短期的な噴火活動予測のために、有効と思われる。Overhauser 効果を利用したこの型のプロトン磁力計(Collin et al.¹⁴⁾)は、既にインドネシアの火山で実用化されているそうである(西田泰典:私信)。

参考文献

- 1) 中川一郎・歌田久司・笹井洋一・石川良宣・小山 茂・大地 洸・徳本哲男, 三宅島火山の地磁気・電気抵抗変化, 本シンポジウム講演集, 1984。
- 2) Rikitake, T. The distribution of magnetic dip in Ooshima (Oosima) Island and its change that accompanied the eruption of Volcano Mihara, 1950. Bull. Earthq. Res. Inst., 29, 161 - 181, 1951.
- 3) Yokoyama, I. Anomalous changes in geomagnetic field on Ooshima Volcano related with its activities in the decade of 1950, J. Phys. Earth, 17, 69-76, 1969.
- 4) Takahasi R. and K. Hirano, Changes in the vertical intensity of geomagnetism that accompanied the eruption, Bull. Earthq. Res. Inst., 19, 373 - 380, 1941.
- 5) Kato, Y. The changes in the Earth's magnetic field accompanying the volcanic eruption of Miyake - jima, Proc. Imp. Acad., 16, 467-472
- 6) Kato, Y. and I. Muroi, The changes in the Earth's magnetic field accomponying the volcanic eruption of Miyake - shima, Sci. Rep. Tohoku Univ., Ser. 5. 15. 33-44, 1964.
- 7) 鍵山恒臣・渡部暉彦・辻浩・小山悦郎・竹田豊太郎・宇平幸一・山本博二, 1983年 三宅島噴火の熱的調査, 下鶴大輔(代表者): 自然災害特別研究報告, 1984.

- 8) Sasai, Y., The piezomagnetic field associated with the Mogi model, Bull. Earthq. Res. Inst., 54, 1-29, 1979.
- 9) Sasai, Y., Applicatim of the elasticity theory of dislocations to tectonomagnetic modelling, Bull. Earthq. Res. Inst., 55, 387-447, 1980.
- 10) Maruyama, T., Statical elastic dislocations in an infinite and semi-infinite medium, Bull. Earthq. Res. Inst., 42, 289-368, 1964.
- 11) Davis, P.M., Surface deformation associated with a dipping hydrofracture, J. Geophys. Res., 88, 5826-5834, 1983.
- 12) 地震総合観測班, 1983年10月3日三宅島火山噴火後の地震活動, 下鶴大輔(代表者): 『昭和58年10月3日三宅島噴火およびその災害に関する調査研究』報告書, 1984
- 13) 宮崎務, 東京都の島しょ地域における災害に関する総合調査報告書, 第2編第1章火山, 東京都防災会議地震部会, 43-105, 1983.
- 14) Collin, C.R., A. Salvi, D. Lemerrier, P. Lemerrier et F. Robach, Magnétomètre différentiel haute sensitivite, Geophys. Prosp., 21, 704-715, 1973.

補録A: 水平方向に無限に長い垂直なダイクの形成に伴うピエゾ磁気ポテンシアル

- (a) x 軸方向の水平帯磁による変化

$$\frac{2}{\beta J_x \mu \Delta U} W^x = 0$$

- (b) y 軸方向の水平帯磁による変化

$$\frac{2}{\beta J_y \mu \Delta U} W^y = W_0^y + \begin{cases} W_I^y (H \geq D) \\ W_{II}^y (D > H \geq d) \\ W_{III}^y (d > H) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
W_o^y &= (2\alpha + 1) \left(-\tan^{-1} \frac{D-z}{y} + \tan^{-1} \frac{d-z}{y} + \tan^{-1} \frac{2H+D-z}{y} \right. \\
&\quad \left. - \tan^{-1} \frac{2H+d-z}{y} \right) + 2(\alpha - 1)y \left(\frac{D}{y^2 + (D-z)^2} - \frac{d}{y^2 + (d-z)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{D}{y^2 + (2H+D-z)^2} + \frac{d}{y^2 + (2H+d-z)^2} \right) - 12Hy \left(\frac{1}{y^2 + (2H+D-z)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2D(2H+D-z)}{(y^2 + (2H+D-z)^2)^2} - \frac{1}{y^2 + (2H+d-z)^2} - \frac{2d(2H+d-z)}{(y^2 + (2H+d-z)^2)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_I^y &= 3(2\alpha - 1) \left(-\tan^{-1} \frac{D-z}{y} + \tan^{-1} \frac{d-z}{y} \right) \\
&\quad + (2\alpha + 1) \left(-\tan^{-1} \frac{2H-D-z}{y} + \tan^{-1} \frac{2H-d-z}{y} \right) \\
&\quad + 2(1-\alpha)y \left(\frac{D}{y^2 + (D-z)^2} - \frac{d}{y^2 + (d-z)^2} \right) \\
&\quad - 6\alpha y \left(\frac{H-D}{y^2 + (2H-D-z)^2} - \frac{H-d}{y^2 + (2H-d-z)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{II}^y &= 3(2\alpha + 1) \left(-\tan^{-1} \frac{H-z}{y} + \tan^{-1} \frac{d-z}{y} \right) \\
&\quad + (2\alpha + 1) \left(-\tan^{-1} \frac{H-z}{y} + \tan^{-1} \frac{2H-d-z}{y} \right) \\
&\quad + 2(1-\alpha)y \left(\frac{H}{y^2 + (D-z)^2} - \frac{d}{y^2 + (d-z)^2} \right) \\
&\quad + 6\alpha y \cdot \frac{H-d}{y^2 + (2H-d-z)^2}
\end{aligned}$$

$$W_{III}^y = 2(1-\alpha)H \left(\frac{y}{y^2 + (D-z)^2} - \frac{y}{y^2 + (d-z)^2} \right)$$

(c) 鉛直 (Z 軸) 方向の帯磁による変化

$$\frac{2}{\beta J_z \mu \Delta U} W^z = W_o^z + \begin{cases} W_I^z & (H \geq D) \\ W_{II}^z & (D > H \geq d) \\ W_{III}^z & (d > H) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
W_0^z = & (2\alpha + 1) \left(-\tan^{-1} \frac{D-z}{y} + \tan^{-1} \frac{d-z}{y} + \tan^{-1} \frac{2H+D-z}{y} \right. \\
& \left. - \tan^{-1} \frac{2H+d-z}{y} \right) + 2(\alpha - 1)y \left(\frac{D}{y^2 + (D-z)^2} - \frac{d}{y^2 + (d-z)^2} \right. \\
& \left. - \frac{D}{y^2 + (2H+D-z)^2} + \frac{d}{y^2 + (2H+d-z)^2} \right) \\
- 12\alpha Hy & \left(\frac{1}{y^2 + (2H+D-z)^2} + \frac{2D(2H+D-z)}{(y^2 + (2H+D-z)^2)^2} - \frac{1}{y^2 + (2H+d-z)^2} \right. \\
& \left. - \frac{2d(2H+d-z)}{(y^2 + (2H+d-z)^2)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_I^z = & 3(2\alpha + 1) \left(-\tan^{-1} \frac{D-z}{y} + \tan^{-1} \frac{d-z}{y} \right) \\
& + (2\alpha + 1) \left(-\tan^{-1} \frac{2H-D-z}{y} + \tan^{-1} \frac{2H-d-z}{y} \right) \\
& + 2(1-\alpha)y \left(\frac{H}{y^2 + (D-z)^2} - \frac{d}{y^2 + (d-z)^2} \right) + 6\alpha y \cdot \frac{H-d}{y^2 + (2H-d-z)^2}
\end{aligned}$$

$$W_{III}^z = 2(1-\alpha)H \left(\frac{y}{y^2 + (D-z)^2} - \frac{y}{y^2 + (d-z)^2} \right)$$

$$\text{但し } \alpha = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$$

補録B：垂直な長方形ダイクの形成に伴うピエゾ磁気ポテンシアル

以下の式では、次の記号を使う。

$$t = x - x_1, \quad r^2 = t^2 + y^2$$

$$p_1 = x_3 - z, \quad p_2 = 2H - x_3 - z, \quad p_3 = 2H + x_3 - z$$

$$q_1^2 = y_2 + p_1^2, \quad q_2^2 = y^2 + p_2^2, \quad q_3^2 = y^2 + p_3^2$$

$$S_1 = \sqrt{r^2 + p_1^2}, \quad S_2 = \sqrt{r^2 + p_2^2}, \quad S_3 = \sqrt{r^2 + p_3^2}$$

$$f(x_1, x_3) \Big|_a^b = f(L, b) - f(L, a) - f(-L, b) + f(-L, a)$$

(a) x 軸方向の水平帯磁による変化

$$\frac{2}{\beta J_x \mu \Delta U} W^x = W_0^x + \begin{cases} W_I^x & (H \geq D) \\ W_{II}^x & (D > H \geq d) \\ W_{III}^x & (d > H) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_0^x = & -\frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \log(S_1 + p_1) + \frac{t^2 - y^2}{r^2} \frac{p_1}{S_1 + p_1} \right\} \right] \Big|_d^D \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \log(S_3 + p_3) + \frac{t^2 - y^2}{r^2} \frac{p_3}{S_3 + p_3} \right\} \Big|_d^D \\ & + \frac{(2\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha} \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log(S_1 + p_1) + \frac{t^2 - y^2}{r^2} \frac{p_1}{S_1 + p_1} \right\} \right] \Big|_d^D \\ & - \left\{ -\frac{1}{2} \log(S_3 + p_3) + \frac{t^2 - y^2}{r^2} \frac{p_3}{S_3 + p_3} \right\} \Big|_d^D \\ & + (\alpha - 1) \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log(S_1 + p_1) + \frac{1}{2} \frac{p_1}{S_1 + p_1} + \frac{y^2}{r^2} \frac{p_1^2}{S_1(S_1 + p_1)} \right\} \right] \Big|_d^D \\ & + z \left\{ \frac{1}{S_1 + p_1} - \frac{y^2}{S_1(S_1 + p_1)^2} \right\} \Big|_d^D \\ & - (\alpha - 1) \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log(S_3 + p_3) + \frac{1}{2} \frac{p_3}{S_3 + p_3} + \frac{y^2}{r^2} \frac{p_3^2}{S_3(S_3 + p_3)} \right\} \right] \Big|_d^D \\ & + (z - 2H) \left\{ \frac{1}{S_3 + p_3} - \frac{y^2}{S_3(S_3 + p_3)^2} \right\} \Big|_d^D \\ & + 9\alpha H \left[\left\{ \frac{1}{S_3 + p_3} - \frac{y^2}{S_3(S_3 + p_3)^2} \right\} \right] \Big|_d^D \\ & - 6(1 - 2\alpha)H \left[\left\{ \frac{1}{S_3 + p_3} - \frac{t^2}{S_3(S_3 + p_3)^2} \right\} \right] \Big|_d^D \\ & - 6\alpha H \left[\left\{ \frac{1}{S_3} - \frac{y^2}{S_3^3} \right\} \right] \Big|_d^D + (z - 2H) \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{3y^2 - r^2}{r^2} \frac{p_3}{S_3} - \frac{y^2}{r^2} \frac{p_3^3}{S_3^3} \right) \right\} \Big|_d^D \\ W_I^x = & \frac{1 - 4\alpha}{2} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \log(S_1 + p_1) + \frac{t^2 - y^2}{r^2} \frac{p_1}{S_1 + p_1} \right\} \right] \Big|_d^D \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \log(S_2 + p_2) + \frac{t^2 - y^2}{r^2} \frac{p_2}{S_2 + p_2} \right\} \Big|_d^D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3(2\alpha-1) \left[-\left\{ \log(S_1 + p_1) \right\} \Big| \Big|_d^D - \left\{ \log(S_2 + p_2) \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& + (1-\alpha) \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log(S_1 + p_1) + \frac{1}{2} \frac{p_1}{S_1 + p_1} + \frac{y^2}{r^2} \frac{p_1^2}{S_1 (S_1 + p_1)} \right\} \Big| \Big|_d^D \right. \\
& \left. + z \left\{ \frac{1}{S_1 + p_1} - \frac{y^2}{S_1 (S_1 + p_1)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& - 3\alpha \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log(S_2 + p_2) + \frac{1}{2} \frac{p_2}{S_2 + p_2} + \frac{y^2}{r^2} \frac{p_2^2}{S_2 (S_2 + p_2)} \right\} \Big| \Big|_d^D \right. \\
& \left. + (z-2H) \left\{ \frac{1}{S_2 + p_2} - \frac{y^2}{S_2 (S_2 + p_2)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& + 3\alpha H \left[\left\{ -\frac{1}{S_2 + p_2} + \frac{y^2}{S_2 (S_2 + p_2)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right]
\end{aligned}$$

$$W_{II}^x = W_I^x (D \rightarrow H) + (1-\alpha) H \left[\left\{ \frac{1}{S_1 + p_1} - \frac{y^2}{S_1 (S_1 + p_1)^2} \right\} \Big| \Big|_H^D \right]$$

$$W_{III}^x = (1-\alpha) H \left[\left\{ \frac{1}{S_1 + p_1} - \frac{y^2}{S_1 (S_1 + p_1)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right]$$

(b) y 軸方向の水平帯磁による変化

$$\frac{2}{\beta J y \mu \Delta U} W^y = W_0^y + \begin{cases} W_I^y & (H \geq D) \\ W_{II}^y & (D > H \geq d) \\ W_{III}^y & (d > H) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
W_0 = & \frac{3}{2} \left[\left\{ \tan^{-1} \frac{t p_1}{y S_1} \right\} \Big| \Big|_d^D - \left\{ \tan^{-1} \frac{t p_3}{t p_3} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& - \frac{(4\alpha-1)(\alpha-2)}{2\alpha} \left[\left\{ \frac{t y}{r^2} \frac{p_1}{S_1 + p_1} \right\} \Big| \Big|_d^D - \left\{ \frac{t y}{r^2} \frac{p_3}{S_3 + p_3} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& + (\alpha-1) \left[\left\{ -\frac{t y}{q_1^2} \frac{p_1}{S_1} - \frac{t y}{r^2} \frac{p_1^2}{S_1 (S_1 + p_1)} + \tan^{-1} \frac{p_1 t}{y S_1} \right\} \Big| \Big|_d^D \right. \\
& \left. + z \left\{ -\frac{t y}{q_1^2} \frac{1}{S_1} + \frac{t y}{S_1 (S_1 + p_1)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& - (\alpha-1) \left[\left\{ -\frac{t y}{q_3^2} \frac{p_3}{S_3} - \frac{t y}{r^2} \frac{p_3^2}{S_3 (S_3 + p_3)} + \tan^{-1} \frac{p_3 t}{y S_3} \right\} \Big| \Big|_d^D \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (z-2H) \left\{ -\frac{ty}{q_3^2} \frac{1}{S_3} + \frac{ty}{S_3 (S_3 + p_3)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \\
& + 9\alpha H \left[\left\{ -\frac{ty}{q_3^2} \frac{1}{S_1} + \frac{ty}{S_1 (S_1 + p_3)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& - 6(1-2\alpha)H \left[\left\{ -\frac{ty}{S_3 (S_3 + p_3)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& - 6\alpha H \left[\left\{ -3ty \frac{p_3^2}{q_3^4} \frac{1}{S_3} - \frac{t^3 y^3}{q_3^4} \frac{1}{S_3^3} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& - (z-2H) \left\{ 2 \left(\frac{ty}{r^4} + \frac{ty}{q_3^4} \right) \frac{p_3^3}{S_3} + \left(\frac{ty}{r^2} + \frac{ty}{q_3^2} \right) \frac{p_3}{S_3^3} \right\} \Big| \Big|_d^D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_I^y &= \frac{1-4\alpha}{2} \left[\left\{ -\frac{ty}{r^2} \frac{p_1}{S_1 + p_1} + \tan^{-1} \frac{tp_1}{yS_1} \right\} \Big| \Big|_d^D \right. \\
& \left. + \left\{ -\frac{ty}{r^2} \frac{p_2}{S_2 + p_2} + \tan^{-1} \frac{tp_2}{yS_2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& + 6\alpha \left[\left\{ \tan^{-1} \frac{tp_1}{yS_1} \right\} \Big| \Big|_d^D + \left\{ \tan^{-1} \frac{tp_2}{yS_2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& + (1-\alpha) \left[\left\{ -\frac{ty}{q_1^2} \frac{p_1}{S_1} - \frac{ty}{r^2} \frac{p_1^2}{S_1 (S_1 + p_1)} + \tan^{-1} \frac{p_1 t}{yS_1} \right\} \Big| \Big|_d^D \right. \\
& \left. + z \left\{ -\frac{ty}{q_1^2} \frac{1}{S_1} + \frac{ty}{S_1 (S_1 + p_1)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& + 3\alpha H \left[\left\{ -\frac{ty}{q_2^2} \frac{1}{S_2} - \frac{ty}{S_2 (S_2 + p_2)} \right\} \Big| \Big|_d^D \right] \\
& - 3\alpha \left[\left\{ -\frac{ty}{q_2^2} \frac{p_2}{S_2} + \frac{ty}{r^2} \frac{p_2}{S_2 (S_2 + p_2)} + \tan^{-1} \frac{p_2 t}{yS_2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right. \\
& \left. + (z-2H) \left\{ -\frac{ty}{q_2^2} \frac{1}{S_2} + \frac{ty}{S_2 (S_2 + p_2)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D \right]
\end{aligned}$$

$$W_{II}^y = W_I^y (D \rightarrow H) + (1-\alpha)H \left[\left\{ -\frac{ty}{q_1^2} \frac{1}{S_1} + \frac{ty}{S_1 (S_1 + p_1)^2} \right\} \Big| \Big|_H^D \right]$$

$$W_{III}^y = (1-\alpha)H \left\{ -\frac{ty}{q_1^2} \frac{1}{S_1} + \frac{ty}{S_1 (S_1 + p_1)^2} \right\} \Big| \Big|_d^D$$

(c) 鉛直 (z 軸) 方向の帯磁による変化

$$\frac{2}{\beta J_z \mu \Delta U} W^z = W_0^z + \begin{cases} W_I^z & (H \geq D) \\ W_{\parallel}^z & (D > H \geq d) \\ W_{\parallel}^z & (d > H) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_0^z = & \frac{3}{2} (1 - 2\alpha) \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log \frac{S_1 - t}{S_1 + t} - \frac{t}{S_1 + p_1} \right\} \parallel_d^D \right. \\ & \left. - \left\{ -\frac{1}{2} \log \frac{S_3 + t}{S_3 + t} - \frac{t}{S_3 + p_3} \right\} \parallel_d^D \right] \\ & + \frac{(2\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha} \left[\left\{ \frac{t}{S_1 + p_1} \right\} \parallel_d^D - \left\{ \frac{t}{S_3 + p_3} \right\} \parallel_d^D \right] \\ & + (\alpha - 1) \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log \frac{S_1 - t}{S_1 + t} - \frac{t y^2}{q_1^2} \frac{1}{S_1} \right\} \parallel_d^D \right. \\ & \left. + z \left\{ \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_1^2} \right) \frac{t p_1}{S_1} \right\} \parallel_d^D \right] \\ & - (\alpha - 1) \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log \frac{S_3 - t}{S_3 + t} - \frac{t y^2}{q_3^2} \frac{1}{S_3} \right\} \parallel_d^D \right. \\ & \left. + (z - 2H) \left\{ \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_3^2} \right) \frac{t p_3}{S_3} \right\} \parallel_d^D \right] \\ & - 9\alpha H \left[\left\{ \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_3^2} \right) \frac{t p_3}{S_3} \right\} \parallel_d^D \right] + 6(1 - 2\alpha) H \left[\left\{ -\frac{t}{r^2} \frac{p_3}{S_3} \right\} \parallel_d^D \right] \\ & + 6\alpha H \left[\left\{ -\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_3^2} \right) \frac{t p_3}{S_3} + \frac{p_3 y^2}{q_3^4} \left(\frac{3t}{S_3} - \frac{t^3}{S_3^3} \right) \right\} \parallel_d^D \right. \\ & \left. + (z - 2H) \left\{ -\frac{1}{q_3^2} \frac{t}{S_3} + \frac{y^2}{q_3^4} \left(\frac{3t}{S_3} - \frac{t^3}{S_3^3} \right) \right\} \parallel_d^D \right] \\ W_I^y = & \frac{2\alpha - 5}{2} \left[\left\{ \frac{t}{S_1 + p_1} \right\} \parallel_d^D + \left\{ \frac{t}{S_2 + p_2} \right\} \parallel_d^D \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 (1 - 2 \alpha) \left[-\frac{1}{2} \left\{ \log \frac{S_1 - t}{S_1 + t} \right\} \Big|_d^D - \frac{1}{2} \left\{ \log \frac{S_2 - t}{S_2 + t} \right\} \Big|_d^D \right] \\
& + (1 - \alpha) \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log \frac{S_1 - t}{S_1 + t} - \frac{t y^2}{q_1^2} \frac{1}{S_1} \right\} \Big|_d^D + z \left\{ \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_1^2} \right) \frac{t p_1}{S_1} \right\} \Big|_d^D \right] \\
& - 3 \alpha H \left[-\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) \frac{t p_2}{S_2} \right] \Big|_d^D + 3 \alpha \left[\left\{ -\frac{1}{2} \log \frac{S_2 - t}{S_2 + t} - \frac{t y^2}{q_2^2} \frac{1}{S_2} \right\} \Big|_d^D \right. \\
& \left. + (z - 2H) \left\{ \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_2^2} \right) \frac{t p_2}{S_2} \right\} \Big|_d^D \right]
\end{aligned}$$

$$W_{II}^z = W_I^z (D \rightarrow H) + (1 - \alpha) H \left[\left\{ \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_1^2} \right) \frac{t p_1}{S_1} \right\} \Big|_H^D \right]$$

$$W_{III}^z = (1 - \alpha) H \left[\left\{ \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{q_1^2} \right) \frac{t p_1}{S_1} \right\} \Big|_d^D \right]$$