境界要素法の地球電磁気学的モデルへの適用　II

－2次元モデルの場合－

日本大学文理学部　大志万　直人

1. はじめに

地球電磁気学的なモデル計算での困難のひとつは，例えば同じように電磁気的なモデル計算を扱う電気工学などと異なり，対象とするモデルを構成する形状・物性そのものが，未知であることである。2次元などでのCAモデルはまさにこの点が問題となる。

この困難を解決するためのひとつの試みとして境界要素法の応用を考えているわけであるが，まだその緒についたばかりである。ここでは，境界要素法の電磁気的モデルへの適用の1例を示し，その地球電磁気学的モデルへの適用の目標を示すこととする。

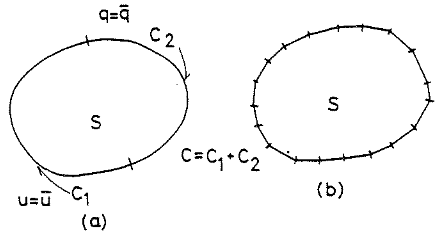
2. 境界要素法

境界要素法は，Greenの公式もしくは，重みつき残差法を用いて，解くべき偏微分方程式と与えられた境界条件とを積分方程式に変換し，この積分方程式を離散化要素を用いて評価する方法である（Brebbia, 1978; Brebbia and Walker, 1979）。ここではLaplace方程式を用いて概説する。

第1図(a)のような領域を考え，次の方程式と境界条件を考える。

領域S内；　$\nabla^2 u = 0$　(1)

$$\text{境界条件；}\quad \left.\begin{array}{ll} C_1\text{上で} & u = \bar{u} \\ C_2\text{上で} & q = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \end{array}\right\} \quad (2)$$



第1図

ここで，基本解（または，無限領域でのGreen関数）u^* を考える。u^*は次の方程式を満す。

$$\nabla^2 u^* + \delta(x - x_i) = 0 \qquad (3)$$

具体的には，u^*は次の形で与えられる。

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ell n \frac{1}{r} \qquad (\text{2次元の場合}) \tag{4}$$

$$u^* = \frac{1}{r} \qquad (\text{3次元の場合}) \tag{5}$$

以上のようなu^*を用いると，Greenの公式または，重みつき残差法を用いて，点Pが領域S内にある場合，境界上$C(=C_1+C_2)$にある場合それぞれについて，uは次のように表わすことができる。

i）$P \in S$のとき $\quad u_P = \int_C q u^* d\Gamma - \int_C u q^* d\Gamma \qquad (6)$

ii）$P \in C$のとき $\quad \frac{1}{2} u_P = \int_C q u^* d\Gamma - \int_C u q^* d\Gamma \qquad (7)$

ここで，(7)式の右辺の積分は境界上での積分になっている。つまりu，qが境界上で定まれば，$u_P(P \in S)$が求められることになる。一方(6)式は，u_P，q，uともに境界上での値となっているので，境界条件を用いて，未知数となっている境界上のq，uを求めることができる。求めるべき境界上でのq，uをまとめると次のようになる。

$$\left.\begin{array}{ll} C_1 \text{ 上では} & q \\ C_2 \text{ 上では} & u \end{array}\right\} \tag{8}$$

C_1上では基本境界条件$\bar{u}$として，C_2上でqは自然境界条件$\bar{q}$として与えられているので，(8)で表わされるq，uを決定できれば(7)式を用いて，S内の任意の点Pでuが決定できることになる。問題は(6)，(7)式の右辺の積分の評価であるが，第1図(b)のように，境界を離散化し各要素上でq，uが一定値をとる（一定要素），線形に変化する（線形要素）……，と考えると，次のように積分を各要素間の相対関係として表わすことができる。（ただしここでは，最も簡単な一定要素としておく）

点Pに対して

$$\int_C q u^* d\Gamma \rightarrow \sum_{j=1}^{n} q_j \int_{C_j} u^* d\Gamma \tag{9}$$

$$\int_C u q^* d\Gamma \rightarrow \sum_{j=1}^{n} u_j \int_{C_j} q^* d\Gamma \tag{10}$$

点Pを要素i上の点とすると (7)式は

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \widehat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} q_j G_{ij} \tag{11}$$

ただし　$\hat{H}i_j = \int_{c_j} u^* d\Gamma$,　$Gi_j = \int_{c_j} q^* d\Gamma$

$j = i$ のときも含めて書きなおすと (11) 式は

$$\sum_{j=1}^{n} Hi_j u_j = \sum_{j=1}^{n} Gi_j q_j \tag{12}$$

(2), (8)のように，未知数と既知数がそれぞれ混り合って(12)式の両辺 u_j, q_j の中にはいりこんでいるので既知の u_j, q_j を右辺に移せば (12) 式は，連立一次方程式となる。(12) 式を模式的に書きなおせば，

$$H \begin{bmatrix} u \\ \bar{u} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \bar{q} \\ q \end{bmatrix} \tag{13}$$

となり，$\bar{u}$, $\bar{q}$ は既知数であり u, q が未知数である。未知数を左辺へ移せば，

$$H' \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} = G' \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{u} \end{bmatrix} \tag{14}$$

となり，これを解けば，境界上で u, q がすべて求まることになる。

3. 境界要素法の静磁場問題への適用

空間中に永久磁化を持つ物体が存在しない場合の静磁場問題を考えると，u を磁気ポテンシャルとして磁場の強さHは，

$$H = -\,\mathrm{grad}\ u \tag{15}$$

となり，領域で透磁率 μ が一定とすると，u は Laplace 方程式を満す。

$$\nabla^2 u = 0 \tag{16}$$

従ってこの問題は 2 節で扱ったようにすれば解くことができる。

しかしながら，μ の異なる物質が存在するような問題を扱う場合には，少し工夫を要する。第 2 図(a)のような 2 次元の静磁場シールドを考える。図は対称性を考慮して全体の 1／4 のみを示してある。つまり静磁場中に，例えば永久磁化をもたない鉄をおいた場合，磁場はどのような影響を受けるかという問題である。この場合は第 2 図(b)のように領域を 3 つの部分（S1，S2，S3）に分け，それぞれの部分領域について，方程式 (12) を組みたてる。これらは以下のようになる。

a)　S 1 で　$[G^1 G_i^1] \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q_i^1 \end{bmatrix} = [H^1 H_i^1] \begin{bmatrix} U^1 \\ U_i^1 \end{bmatrix}$　(17)

b) S 2で

$$[G^2\ G_i^{12}\ G_i^{23}] \begin{bmatrix} Q^2 \\ Q_i^{12} \\ Q_i^{23} \end{bmatrix} = [H^2\ H_i^{12}\ H_i^{23}] \begin{bmatrix} U^2 \\ U_i^{12} \\ U_i^{23} \end{bmatrix} \tag{18}$$

c) S 3で

$$[G^3\ G_i^3] \begin{bmatrix} Q^3 \\ Q_i^3 \end{bmatrix} = [H^3\ H_i^3] \begin{bmatrix} U^3 \\ U_i^3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

G^K, H^K, G_i^K, H_i^K などは小行列を示す。また Q_i^1, U_i^1, Q_i^{12}, Q_i^{23}, U_i^{12}, U_i^{23} ……, などの i のついたものは隣りの部分領域と接している境界上(内部境界)での各要素の q , u の値である。ここで内部境界では q , u ともに未知数となることに注意する。

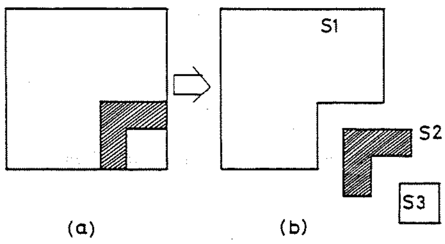
ところで, μ の異なる物体が接する境界上では次の境界条件が成立たなければならない。

$$-\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \tag{20}$$

$$u_1 = u_2$$

ただし n は各領域の境界の外側方向を正とする。

従ってこのことから (17) ~ (18) 式中で i のついたものは次の式を用いて書きなおすことができる。



第2図

a) S 1とS 2の境界上で

$$U_i^1 = U_i^{12} = u_i^{①}, \quad \mu_1 Q_i^1 = -\mu_2 Q_i^{12} = q_i^{①} \tag{21}$$

b) S 2とS 3の境界上で

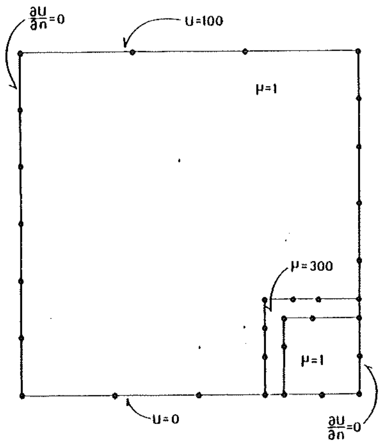
$$U_i^3 = U_i^{23} = u_i^{②}, \quad \mu_2 Q_i^{23} = -\mu_3 Q_i^3 = q_i^{②} \tag{22}$$

(17) ~ (18) 式をまとめた行列表現を用いると, 全領域で次のようになる

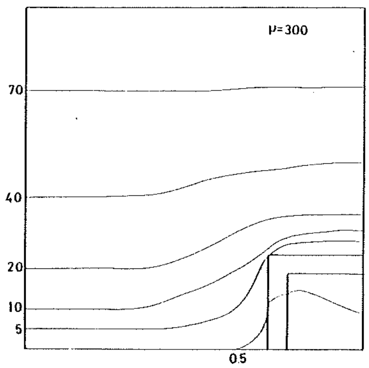
$$\begin{bmatrix} G & \frac{1}{\mu_1}G_i^1 & -H_i^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu_2}G_i^{12} & -H_i^{12} & G^2 & \frac{1}{\mu_2}G_i^{23} & -H_i^{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_3}G_i^3 & -H_i^3 & G^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^1 \\ q_i^{①} \\ u_i^{①} \\ Q^2 \\ q_i^{②} \\ u_i^{②} \\ Q^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^1 & 0 & 0 \\ 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & H^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} \tag{23}$$

この連立方程式を解いて得られたq，uを用いて各部分領域で式(6)を用いてuを計算すればよい。

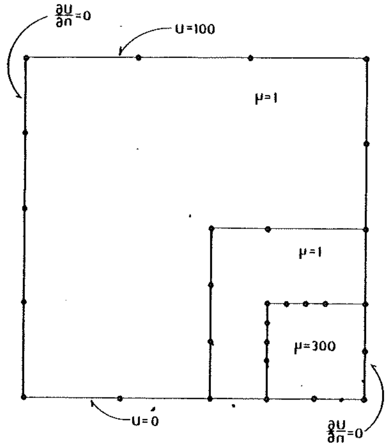
一定要素を用いた場合の例を第3図より第5図に，用いた要素分割，境界条件およびμの値とともに示す。各図とも等磁気ポテンシャル線を示してある。



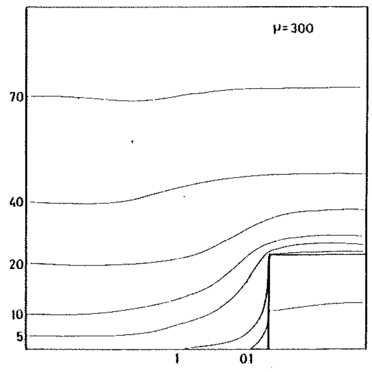
第3図（a）



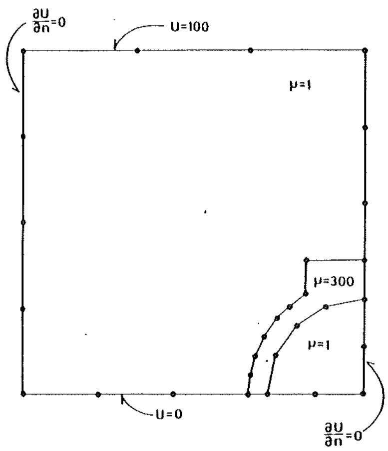
（b）



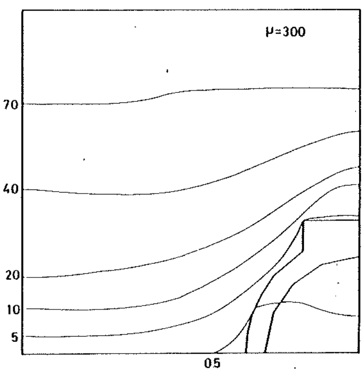
第4図（a）



（b）



第5図（a）



（b）

4. インダクションモデルへの適用について

以上2節，3節で述べた方法は同様にして変動磁場の場合にも適用できる。その場合の方程式は一般的にHelmholtz方程式となるが，基本解は

$$\phi^{*}= \frac{1}{4\pi r}\ \exp(-i\omega r) \qquad (\text{3次元の場合})$$
$$\phi^{*}= \frac{i}{4} H_0^{(2)}\ (\omega r) \qquad (\text{2次元の場合})$$

となる。ただしωは定数で$H_0^{(2)}$は0次の第2種Hankel関数。

ところで，地球電磁気学的な変動磁場のモデルについて考えてみると，最終的な解は磁場の強さ**H**，磁場のベクトルポテンシャル**A**，もしくは，電場**E**を考えている全空間において求めることではなく，地表でのレスポンスを拘束条件として，地下の電気伝導度σの分布構造を決定することにある。（従って，**H**，**A**，**E**は地表での値を求めればよい）しかしながら，σを2次元もしくは3次元空間での連続関数として決定してゆくことは不可能に近いので，σが一定の領域をいくつか作りその形状とσの値を決めることになる。

現在のモデル化においては，差分法にしても有限要素法を用いるにしても，その領域の形状は唯一性に欠ける。例えば，ある領域が地球物理学的に興味をひく場合は，その領域の位置・形状についてある程度の唯一性の議論が必要となる。しかしながら，差分法・有限要素法においては，その解法の性質上，その領域を自由に変形させて，いろいろな場合にあたってみるということが困難である。（有限要素法の場合領域形状は自由にとれるが，その場合のデータ作りが比較的めんどうである)一方．境界要素法においてはその基本的な連立方程式を構成するための要素は，その領域の境界の形状そのもので内部から完全に独立であるため，自動的にプログラム中でその形状を変化させ，地表のレスポンスを計算し観測値に最もよく合う形状（位置も含めて）を多くの例から選び出すことができる。（CPUタイムの制限はあるが） つまり，完全な意味でのインバージョンはむずかしいが，擬似インバージョン（ある注目すべき領域のみ，与えられたσの，あるコントラストの中で，という意味で）を2次元以上で可能にすることができると思われる。

5. まとめ

3節で示した例は，一定要素を用いて，しかもかなりあらい要素分割で計算したものであるが，結果は充分満足できるものとなっていると思われる。境界要素法は，問題の次元を1つ下げることができるため，メモリの利用効率を上げることができるが，連立方程式を構成する際，ひとつの要素と残りの要素との間でその相互作用のようなものを評価しなければならないため

(H_{ij}, G_{ij}の計算)，ＣＰＵタイムにおいては，有限要素法などと比較すれば，その利用効率をそれほどかせぐことができない。しかしながら，境界要素法を地球電磁気学的モデルに適用する利点は，４節で述べた点にあると思われる。

参考文献

Brebbia, C. A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London (1978).

Brebbia, C. A. and Walker, S., Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, London (1979).